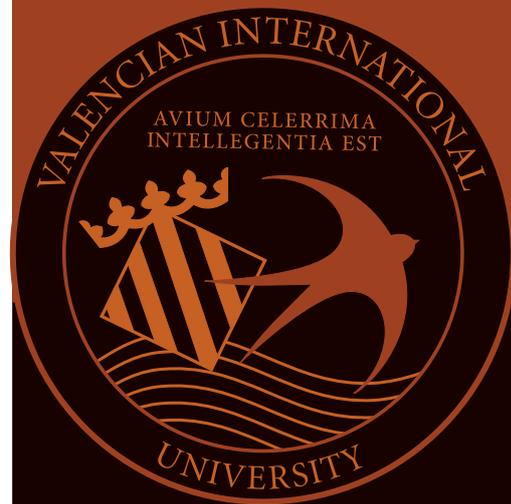


www.viu.es



**MODALIDAD ON-LINE
AUDIOVISUAL**

**GRADO EN EDUCACIÓN
PRIMARIA**

viu VALENCIAN
INTERNATIONAL
UNIVERSITY

GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

No está permitida la reproducción total o parcial del contenido de estos materiales didácticos ni su tratamiento por cualquier método, físico o electrónico, sin el permiso expreso por escrito de los titulares del copyright.

Edita

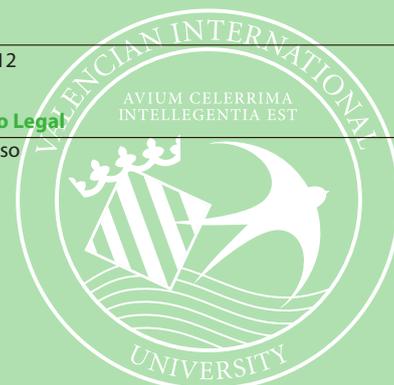
Universitat Internacional Valenciana / VIU

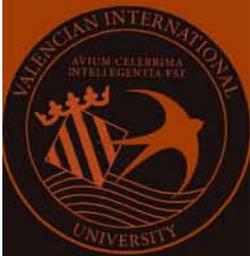
Curso

2011-2012

Depósito Legal

En proceso





ASIGNATURA 6

(9 ECTS)

**GRADO EN EDUCACIÓN
PRIMARIA**

**MÓDULO DE FORMACIÓN
DIDÁCTICA Y DISCIPLINAR**

**DIDÁCTICA DE LAS
MATEMÁTICAS**

D^a ROSARIO NOMDEDEU MORENO
CONSULTORA

www.viu.es



Índice

PARTE I: DIDÁCTICAS

TEMA 1. COMPETENCIAS	9
TEMA 2. DIDÁCTICA GENERAL	11
2.1. Introducción	11
2.2. Comenius.....	12
2.3. Pestalozzi	13
2.4. Freinet.....	13
2.4.1 Experiencia	13
2.4.2 Funcionalidad.....	13
2.4.3 Cooperación	14
2.5. Ausubel	14
2.6. Vigotsky.....	15
TEMA 3. DIDÁCTICA ESPECÍFICA DE LAS MATEMÁTICAS.....	16
3.1. Didáctica matemática clásica.....	16
3.1.1 Crítica.....	16
3.1.2 Decroly.....	19
3.1.3 Montessori.....	20
3.1.4 Piaget.....	21
3.1.5 Puig Adam heurística y didáctica pedagógica	22
3.2. Didáctica fundamental	24
3.2.1 Cockroft.....	24
3.2.2 Situaciones didácticas	28
3.3. Didáctica ecléctica.....	30
3.3.1 Epítome sobre los programas de investigación	30
3.3.2 Primer nivel de profundización: un currículo enculturizador	36
3.4. El currículo oficial de primaria.....	44



3.4.1	Competencias y objetivos.....	44
3.4.2	Contenidos.....	48
3.4.3	Recursos para el aula de Matemáticas en Primaria.....	48
3.4.4	Evaluación.....	51
3.5.	Ejes transversales vertebradores del aprendizaje de las matemáticas.....	52
3.5.1	Dimensión histórica, social y cultural.....	52
3.5.2	Resolución de problemas.....	52
3.5.3	Experiencia.....	53

PARTE II

TEMA 1. ESTRUCTURA Y RECOMENDACIONES.....	55	
TEMA 2. DIDÁCTICA DE LA ARITMÉTICA.....	57	
2.1	Contenidos didácticos.....	58
2.1.1.	Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje.....	58
2.1.2.	Contenidos matemáticos, recursos didácticos y situaciones didácticas.....	62
TEMA 3. DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA PLANA Y ESPACIAL.....	72	
3.1	Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje.....	72
3.1.1.	El modelo de los niveles de Van Hiele:.....	72
3.1.2.	El modelo evolutivo de Piaget.....	75
3.2	Contenidos, recursos y, situaciones.....	77
3.2.1.	Contenidos matemáticos.....	77
3.2.2.	Materiales.....	79
3.2.3.	Situaciones didácticas.....	80
TEMA 4. DIDÁCTICA DE LA PROPORCIONALIDAD Y MEDIDA.....	85	
4.1	Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje.....	87
4.2	Contenidos, recursos y situaciones.....	90
TEMA 5. DIDÁCTICA DEL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD.....	95	
5.1	Estadística.....	96
5.1.1.	Contenidos Didácticos: desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje.....	96
5.1.2.	Contenidos, recursos y situaciones.....	97



5.2	Probabilidad	102
5.2.1.	Contenidos didácticos: Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje	102
5.2.2.	Contenidos, recursos y situaciones	105
CONCLUSIONES	111
GLOSARIO	117
LISTA DE ENLACES (LINKS)	125
BIBLIOGRAFÍA	131

LEYENDA



Glosario

Términos cuya definición correspondiente está en el apartado "Glosario".





PARTE I: DIDÁCTICAS

TEMA 1. COMPETENCIAS

El alumnado del Grado de Maestro/a de Primaria debe alcanzar niveles mínimos de las siguientes competencias para comenzar a ejercer su profesión y seguir trabajando, investigando y evaluando su actividad, para seguir aprendiendo de ella, progresando de ese modo en su calidad profesional.

Las competencias que se enumeran a continuación no se alcanzan trabajando unos contenidos específicos para cada una de ellas. Los contenidos específicos están al servicio de la consecución de objetivos que se expresan en términos de capacidades y éstas influyen en la progresión de varias competencias. Entre los objetivos y las competencias existen diferencias que importa conocer para comprender la estructura del curso y su relación con otras áreas del Grado de Maestro/a de Primaria:

- D1. Expresan expectativas de aprendizaje en el corto/ largo plazo.
- D2. Describen conocimientos específicos/ disciplinas generales.
- D3. Se muestran por medio de capacidades/ procesos cognitivos.
- D4. Se movilizan mediante tareas concretas/ tareas complejas.
- D5. Se evalúan por temas y cursos/ por periodos amplios.
- D6. Su programación se hace por temas/ por periodos amplios.

Las competencias que esperamos que alcance el alumnado del Grado de Maestro/a de Primaria son:

- C.1. Conocer y analizar el currículo de Matemáticas en primaria.
- C.2. Desarrollar la capacidad de análisis e intervención en las situaciones de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Educación Primaria.
- C.3. Conocer el planteamiento y la resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Primaria.
- C.4. Utilizar las tecnologías de la información y de la comunicación, TIC, como recursos habituales en matemáticas.



- C.5. Fomentar entre los alumnos el razonamiento, la justificación y argumentación y el análisis crítico.
- C.6. Fomentar el razonamiento, la justificación y argumentación, el análisis crítico y la comunicación mediante un correcto lenguaje matemático para la interpretación y producción de información, resolución de problemas reales y toma de decisiones con criterio.
- C.7. Conocer y utilizar **recursos didácticos** apropiados para promover las competencias correspondientes en los estudiantes.
- C.8. Conocer y aplicar **metodologías** y **técnicas básicas de investigación educativa** en Didáctica de las Matemáticas y ser capaz de diseñar **proyectos de innovación**.
- C.9. Conocer y aplicar experiencias innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en especial TIC, en la enseñanza de las Matemáticas.
- C.10. Conocer las dificultades y los errores en el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria.
- C.11. Diseñar, planificar y evaluar la actividad docente y el aprendizaje en el aula de Matemáticas.

Para alcanzar estas competencias, es necesario, como se indica en la primera de estas competencias, conocer el currículo de Matemáticas en Primaria, lo cual queda cubierto, en el Grado de Maestro/a de Primaria, en la asignatura de Matemáticas.

Las competencias de 2 a 6 quedan al amparo de los temas 2 a 5 de la segunda parte de este documento y de las asignaturas de Didáctica General y Matemáticas del Grado de Maestro/a de Primaria.

Las competencias de 7 a 11 exigen que el alumnado del Grado de Maestro/a de Primaria, conozca la evolución de la Didáctica de las Matemáticas, y, para ello, trataremos esta cuestión en la primera parte, dividida en tres temas, el segundo de los cuales trata someramente la didáctica general en los aspectos que interesan a la Didáctica de las Matemáticas y el tercero consta de cinco epígrafes: Didáctica clásica de las Matemáticas, Didáctica fundamental, Didáctica **ecléctica**, el currículo oficial y ejes vertebrales del aprendizaje de las Matemáticas. También contribuirán al desarrollo de estas competencias



las capacidades alcanzadas en el área de Didáctica General del Grado de Maestro/a de Primaria.

Siempre bien entendido que estas competencias no se alcanzan de modo compartimentado, antes bien, lo hacen entreveradamente, de modo que las asignaciones realizadas a los temas que vamos a desarrollar son meramente indicativas. Los temas tratan preferentemente de desarrollar unas u otras competencias, pero no en exclusiva.

TEMA 2. DIDÁCTICA GENERAL

2.1. Introducción

Aunque ya habréis estudiado en profundidad los temas de la didáctica general en la asignatura que lleva su nombre y las Matemáticas necesarias para ejercer como maestras o maestros de Matemáticas en Primaria las habréis aprendido en la asignatura del mismo nombre, no puedo evitar algunos comentarios acerca de los preconceptos que actúan entre esos aprendizajes y la Didáctica de las Matemáticas. Me refiero a las ideas previas que acompañan a cada enseñante, que nacen de un territorio personal e intransferible, que tienen que ver con el propio aprendizaje, con la propia experiencia, la propia manera de ver el mundo, que indudablemente influirán en la forma de enseñar en general y marcarán considerablemente la forma de concretar el aprendizaje específico de cualquier materia, también de las matemáticas.

*Si cuando actúo como profesor/a tomo como punto de partida esas deshilvanadas ideas o nociones, o hipótesis, las consecuencias metodológicas, sociales y éticas son extraordinariamente importantes. Por ejemplo, el modelo de enseñanza por transmisión se desvanece, y con él el modelo "profesor-alumno" que se caracteriza porque el alumno, el aprendiz intenta **imitar** al profesor. Y si no se desvanece, al menos queda limitado al aprendizaje de ciertas técnicas manuales o a campos en los que predominan las acciones perceptibles, campos de muy escasa extensión si se les compara con aquellos en los que predominan las acciones mentales. Más aún, supone alterar radicalmente el relato de la historia del pensamiento humano.*

(Hernán, F., 1988, p, 7-11)



Esas ideas previas que, como he sugerido, no brotan de la nada, brotan a veces, sin saberlo, de lecturas que no recordamos pero cuyos contenidos permanecen en nuestra memoria profunda, de experiencias que hemos vivido junto a quienes nos han servido de modelos consciente o inconscientemente o de contramodelos que nos han ayudado a descubrir el camino que **no** deseamos seguir, son el eco que una mayoría de enseñantes escuchamos en la profundidad de nuestro pensamiento, procedente de las voces de algunos de los pedagogos - modelos, que han marcado de modo determinante la evolución de la Didáctica de las Matemáticas:

2.2. Comenius

Comenius consideró que las escuelas de preescolar, infantil, la de la adolescencia y la de la juventud no debían enseñar cosas diferentes, sino las mismas cosas de maneras distintas según el nivel de preparación de cada momento.

Opinaba que el aprendizaje debe empezar necesariamente a través de los sentidos ya que, decía,

Nada puede ser objeto de comprensión si no ha sido primero objeto de sensación, ¿por qué, entonces, empezar la enseñanza con una exposición verbal de las cosas y no con una observación real de ellas? Solamente cuando esta observación de la cosa haya sido hecha, la palabra podrá intervenir para explicarla con eficacia.

Siguiendo las huellas de la Naturaleza hallaremos que fácilmente puede instruirse a la juventud si :

- *Se comienza temprano antes de la corrupción de la inteligencia.*
- *Se actúa con la debida preparación de los espíritus.*
 - *Se procede de lo general a lo particular.*
 - *Y de lo más fácil a lo más difícil.*
- *Si no se carga con exceso a ninguno de los que han de aprender.*
 - *Y se procede despacio en todo.*
- *Y no se obliga al entendimiento a nada que no le convenga por su edad o por razón del método.*
 - *Y se enseña todo por los sentidos actuales.*



- Y para el uso presente

- Y siempre por un solo y mismo método.

De esta manera todo se irá consiguiendo suave y gratamente.

(Jan Amos Comenius, 1657, p. 49).

Según estos principios podemos vislumbrar ideas predecesoras de la teoría de la elaboración, de la enseñanza por ciclos, o lo que hoy llamamos currículo en espiral, e incluso de la elogiada educación lenta que hoy se defiende en ciertos foros.

2.3. Pestalozzi

Pestalozzi en 1801 ya criticaba la enseñanza que hoy sigue siendo mayoritaria, la enseñanza por transmisión. Decía de ella que las definiciones murmuradas al oído por el maestro, como si fuera el apuntador del teatro, sólo podían producir comediantes mediocres.

En su libro **Cómo Gertrudis educa a sus hijos** criticó la enseñanza memorística árida e intelectualista de su tiempo y propuso un método que educa a un tiempo el corazón, el intelecto y la mano.

Comenius y Pestalozzi sembraron la semilla de un árbol, hoy frondoso, cuyos frutos no son sólo la enseñanza por ciclos y el método intuitivo-constructivo, sino también la toma de conciencia de que la Didáctica de cada materia debe ser una ciencia específica basada en dicha materia y en la estructura mental del educando.

2.4. Freinet

Los principios pedagógicos, que inspiraron la labor de Célestin Freinet, se pueden resumir en tres conceptos: experiencia, funcionalidad y cooperación.

2.4.1 Experiencia

El alumno/a aprende de sus propias experiencias, en su entorno próximo.

2.4.2 Funcionalidad

Para que el aprendizaje sea sólido y motivador, el alumno/a debe sentir que lo que hace sirve para algo, es útil a los demás, tiene una función en su entorno.



2.4.3 Cooperación

El aprendizaje es construcción de conocimiento y éste es una construcción social, para lo cual, en el aula es necesaria la cooperación, que al mismo tiempo imprime dicho valor en el educando.

2.5. Ausubel

Ausubel acuñó la expresión aprendizaje <<significativo>> para referirse al aprendizaje en el que la materia nueva puede relacionarse de manera sustancial con el conocimiento que el alumno/a ya posee. Dicha materia nueva debe ser coherente con la estructura de conocimiento y la lógica previa del estudiante que además, para aprender significativamente, debe estar predispuesto/a hacia ese aprendizaje.

Distinguió dos tipos de aprendizaje: por recepción o por descubrimiento y dos tipos de proceso de formación: mecánico o por repetición y aprendizaje significativo, los cuales no son mutuamente excluyentes, es más, su conjunción puede ser beneficiosa según qué conjunción y qué aprendizajes. Lo podemos ver sintéticamente en el cuadro siguiente, extraído de la Tesis Doctoral de D. Manuel Alcalde:



Pulse [aquí](#) para ver la web.

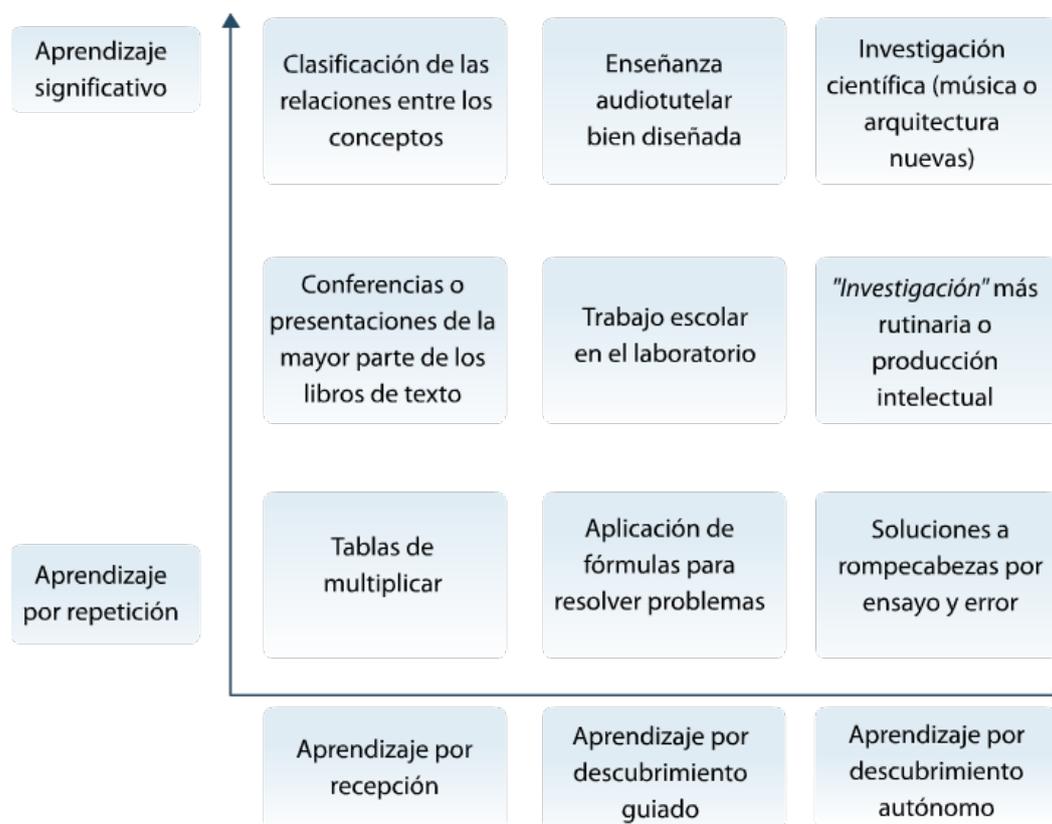


Ilustración 1. Ausubel, Novak y Hanesian, 1978, p. 35.

2.6. Vigotsky

Frente a la imagen clásica del profesor/a como transmisor/a de conocimientos <<a la espera>> de que sus estudiantes alcancen un cierto nivel de maduración intelectual. Vygotsky promueve la figura e maestro/a como promotor potencial del desarrollo psicológico de sus estudiantes a través del lenguaje. El lenguaje es el vehículo sobre el que viaja el pensamiento y gracias al que las personas se apropian de la cultura de su grupo social. A continuación se expone un mapa cognitivo que sintetiza las concepciones de Vigotsky:

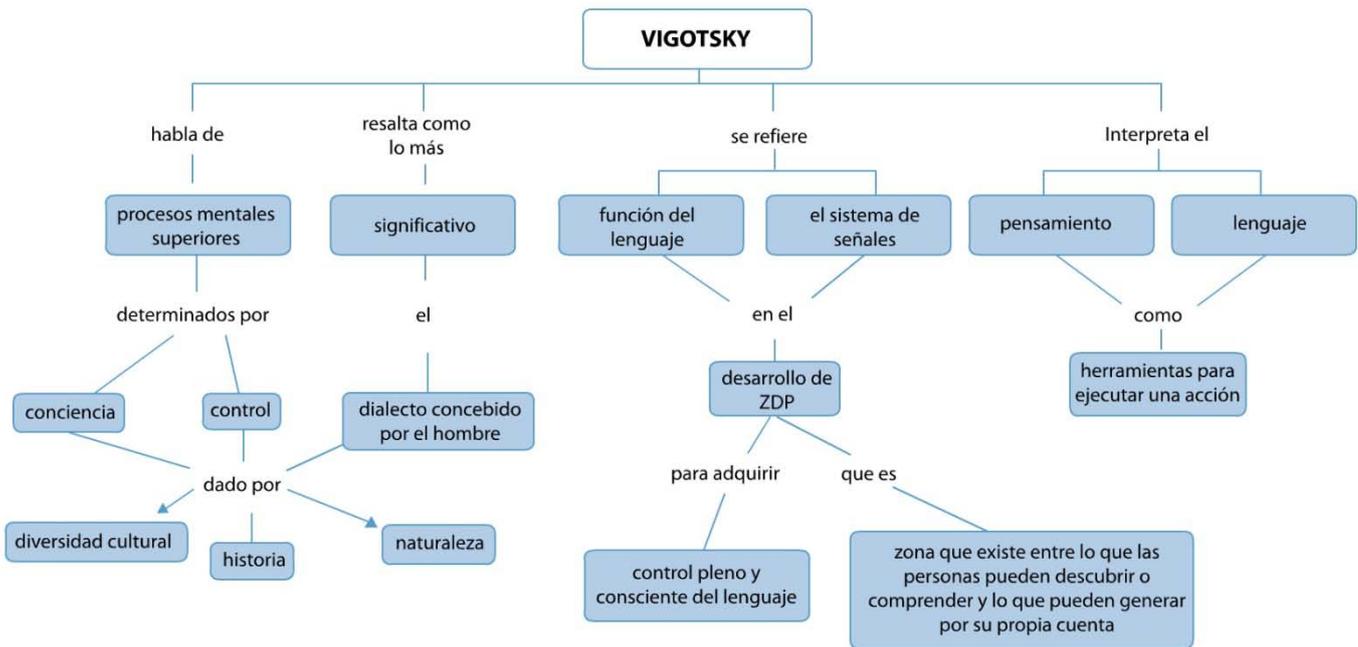


Ilustración 2. Modelo de Vigotsky.

Para profundizar en las aportaciones de los autores mencionados en esta sección, recomiendo visitar la página de la mencionada Tesis doctoral de D. Manuel Alcalde.

Vistos algunos de los principales autores de la didáctica general, en el siguiente tema haremos un recorrido sucinto por las vicisitudes de la didáctica de las matemáticas en algunas de sus principales etapas.

TEMA 3. DIDÁCTICA ESPECÍFICA DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. Didáctica matemática clásica

3.1.1 Crítica

A principios del siglo pasado, la preocupación generalizada entre los responsables de la enseñanza de las matemáticas, produjo las condiciones para la creación de la Comisión Internacional de Enseñanza Matemática, a iniciativa de David Eugene Smith. La tarea encomendada a esta comisión fue la de coordinar esfuerzos de varias naciones, revisando las tendencias, programas, métodos, contenidos, objetivos, etc. A la luz de las nuevas conquistas



pedagógicas y psicológicas. Destacan como reformadores de esta etapa los italianos Volterra y Enrique Castelnuovo.

En 1952, tras un lapso de inactividad durante la segunda guerra mundial, esta comisión se convierte en una sección de la Unión Matemática Internacional. Previamente, en 1950, había nacido la Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas que reunió a expertos de las especialidades que tenían algo que aportar a esta comisión. Los expertos más relevantes de la comisión fueron A. Choquet (matemático), J. Piaget (psicólogo), A. Gattegno (pedagogo).

Su declaración fundacional fue: "La Comisión se propone tomar todas las iniciativas que, en al campo de la acción y del estudio, lleven a una mejor comprensión de los problemas planteados por la enseñanza de las matemáticas para su mejora en todos los niveles".

En los sesenta, los reformadores de más renombre fueron Papy, en Bélgica. Como consecuencia de los éxitos obtenidos en el campo de la investigación, gracias a la herramienta del álgebra de estructuras, hubo un tsunami que invadió las aulas, incluso de primaria, con las llamadas "matemáticas modernas".

En 1970, la UNESCO declaró que "los niños y las niñas que ahora van a la escuela pasarán la mayor parte de sus vidas de adultos en el siglo XXI, pero muchos son educados con métodos del siglo XIX". Era un toque de atención alarmante que exigía respuestas vigorosas y urgentes. De ahí los sucesivos proyectos en todas las naciones. Gattegno, con motivo del homenaje a Puig Adam dijo unas palabras: "Nuestra amistad entrañable y la íntima relación que mantuve con él en los últimos años de su vida, me permiten afirmar que nada hubiera causado tanta alegría a D. Pedro Puig Adam como el ver iniciada en España una auténtica y profunda reforma estructural de la enseñanza de las matemáticas".

Pronto, en los setenta, varios grupos de profesores de los niveles no universitarios reivindicaron que: la solución a los problemas de la estancada escuela tradicional no se iban a resolver enseñando matemáticas modernas, sino con una enseñanza moderna de las matemáticas, como había aseverado el profesor Freudenthal, adecuadas a cada edad, para preparar a las alumnas y los alumnos

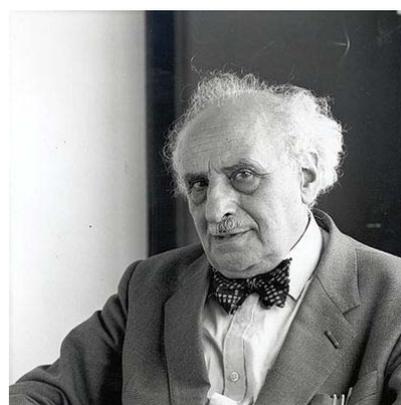


Ilustración 3. Profesor Hans Freudenthal.

Pulse [aquí](#) para ver la fuente.



convenientemente para insertarse con autonomía y eficacia a sus vidas de adultos.

En 1975, en el nº 2 de la revista Escuela 75, un grupo de profesores de Matemáticas decidió poner en cuestión colectivamente esta problemática. El trabajo que sigue puede ser considerado como expresión de sus posiciones en aquel momento, de los problemas que se planteaban y de las líneas de investigación que se proponían seguir desde aquel momento.



El título del artículo-manifiesto era ya provocador:

¿Para qué las matemáticas? Pulse [aquí](#) para ver la web

Éste no es un manifiesto para leer y adherirse dogmáticamente a él, nunca tuvo esa intención, sino la de provocar la reflexión, su tiempo ya pasó, pero conserva toda su potencia provocadora y, salvando las distancias que marcan más de tres décadas, considero un ejercicio saludable su lectura crítica, analizando: qué permanece con validez para nuestras reflexiones actuales y qué ha dejado de tener vigencia.

Muchos son los personajes citados en este manifiesto de mediados de los 70, la mayoría serían tenidos en cuenta en los planes educativos que estaban por venir y que desde los ochenta, siguen impregnando las declaraciones de intenciones de los sucesivos planes educativos.

Entonces y ahora nos preocupaba el fracaso escolar. No sería vano reflexionar sobre los invariantes de esta preocupación a lo largo del tiempo.



Para ello puede resultar de utilidad consultar el artículo **Fracaso en Babel**.

Pulse [aquí](#) para ver la web. Publicado por la editorial Graó en su colección UNO de Didáctica de las Matemáticas.

El título “¿Para qué las Matemáticas?” Sugería una discusión sobre objetivos que llevaba al cuestionamiento de los contenidos y a desplazar el acento del para qué o el qué al para quién, cuyas respuestas oficiales se cuestionan en el artículo “Fracaso en Babel”, ya que son variadísimas, según el lugar desde donde se respondan:

La lectura crítica de lo antedicho, incluidos los textos recomendados en los enlaces, pretende facilitar al alumnado de Didáctica de las Matemáticas comprender en profundidad las **competencias** que debe adquirir para el buen desempeño de su tarea futura: el alumno de



Didáctica de las matemáticas para primaria, debe conocer no sólo los contenidos del currículo de Primaria, sino también el **método** [☞], el **modo** [☞], las **técnicas** [☞], las **estrategias** [☞] que le ayuden en su tarea de facilitar el aprendizaje a su propio alumnado y a sí mismo a investigar, durante el proceso de la acción educativa, para seguir aprendiendo y creciendo profesionalmente.

Es de obligado respeto hablar un poco sobre algunas de esas voces que reverberan en cada uno de los textos referenciados. No pretendo ser exhaustiva en el tratamiento de las propuestas de cada uno de ellos, pero sí que considero necesarias unas pinceladas en algunos de los casos citados, y en otros que posteriormente alzaron su voz desde sus inquietudes y sus investigaciones, dando pistas a seguir en la elección de objetivos, contenidos, métodos, materiales y sistemas evaluativos (siempre relacionados con las capacidades enunciadas en los objetivos, modeladoras de las competencias pretendidas). Es particularmente interesante recorrer estas voces en **búsqueda** de métodos y modos de abordar la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en general y las de Primaria en particular. Es muy recomendable también, hacer un autoanálisis en el proceso de aprendizaje como futuros maestros y maestras, al hilo de las palabras de los grandes maestros y maestras que nos han precedido en la noble tarea de ayudar a alumbrar el conocimiento de niñas y niños.

3.1.2 Decroly

Los principios que inspiran la obra de Decroly son:

- Afirmación de la conveniencia de que el niño/a pase de la observación global a la descomposición del fenómeno.
- Introducción de los centros de interés como propuesta pedagógica.
- Defensa del respeto por el niño/a y su personalidad.
- Preparación de l@s niñ@s para vivir en libertad.
- Oposición a la disciplina rígida.
- Creación de un ambiente motivador.
- Trabajo con grupos homogéneos.
- Observación de la naturaleza.
- Apuesta por la escuela activa.



Su método es, en consecuencia, **activo-analítico**. Su gran aportación en relación a este documento es la inclusión de las matemáticas de la vida cotidiana, mostrando su riqueza de contenidos y de interconexión con otras disciplinas y con otras áreas del currículo. Es paradigmático el ejemplo de la elaboración de una receta, de un pastel, por ejemplo. Decroly nos invita a descubrir las matemáticas necesarias para combinar los ingredientes, para obtenerlos (lugar, precios, coste, relación calidad/precio, etc.) o para repartir el producto resultante.

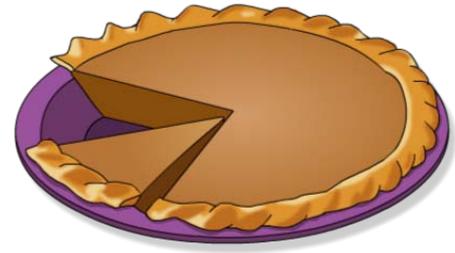


Ilustración 4. Reparto del pastel.

3.1.3 Montessori

María Montessori elaboró una filosofía del aprendizaje que defendió la dignidad, la libertad y la independencia de los y las niños. Les dejó libertad para desarrollar su actividad de aprendizaje y la responsabilidad de saber cómo usar esa libertad. La labor del maestro/a debía estar encaminada a crear el ambiente propicio en el que las criaturas desarrollaran sus actividades en plena libertad y a tomar la responsabilidad de guiarlas. Las aulas debían disponer de distintos ambientes, con mesas apropiadas al tamaño de los niños y niñas y uno para trabajar en el suelo.



Cada ambiente debía estar equipado con materiales adecuados al conocimiento que se quería desarrollar en esa área. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo "Material Montessori".

Tras la percepción de las propiedades de material, vendría la síntesis, era un método **activo-sintético** de enseñanza y aprendizaje. Para el aprendizaje de los números ideó un método análogo al de las regletas de Cuisenaire, predecesor de éste y de los bloques lógicos de Diennes:

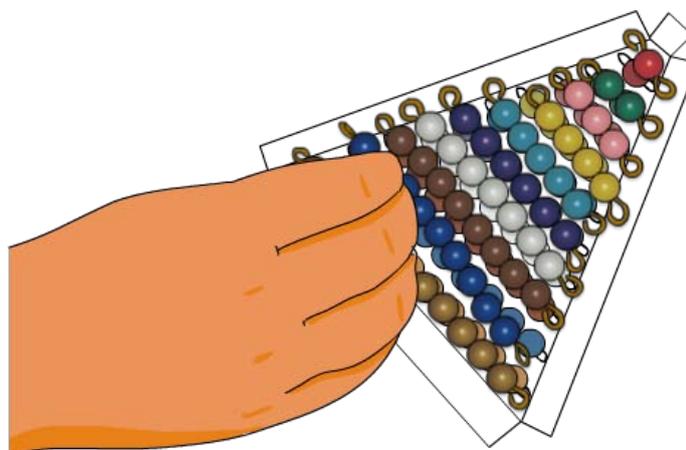


Ilustración 3 . Material Montessori precursor de las regletas Cuisenaire y de los bloques lógicos de Diennes.

En la actualidad se ha implementado y está alcanzando popularidad entre los usuarios de del Ipad. Ambos, Decroly y Montessori, son los padres de la **escuela activa**.

3.1.4 Piaget

Piaget, Biólogo, discípulo de la escuela activa, defensor del aprendizaje como construcción personal, consideraba que los individuos recorren en su desarrollo la historia intelectual de la especie humana. En particular esto puede ser relevante para determinar las etapas del desarrollo de las capacidades intelectuales, en particular las matemáticas. Aunque afirmó que existían estas etapas, no fue tajante en la asignación de edades que delimitaran las etapas, aunque sí hizo algunas insinuaciones que fueron investigadas más tarde, dando lugar a resultados como el siguiente, debido a Orts, y que no conviene tomar **más** que como mero indicador, con mucha flexibilidad.



Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes...

Edad	Capacidad elevada	Capacidad media	Capacidad baja	Edad
1	Etapa sensorio-motriz			1
2				2
3	Etapa preoperativa			3
4				4
5				5
6				6
7				7
8	Etapa de las operaciones concretas			8
9				9
10				10
11				11
12				12
13				13
14				14
15	Etapa de las operaciones formales			15
16				16
17				17
18				18
19				19

Ilustración 4. Modelo de Piaget en Alcalde, M.

3.1.5 Puig Adam heurística y didáctica pedagógica

Pedro Puig Adam es el exponente español de la didáctica clásica. Considera que la Didáctica, como fenómeno de transmisión del conocimiento, es tan antigua como el conocimiento mismo. Pero la Didáctica, como arte, como ciencia o como simple técnica, toma cuerpo cuando los conocimientos adquiridos por la humanidad empiezan a rebasar las posibilidades de asimilación del educando durante su vida escolar, creando problemas de selección, de sistematización y de presentación, es decir **de programa, de método y de modo**. Por último, estos problemas pasan a la categoría de problemas pedagógicos cuando se enfoca con ellos no sólo la más eficaz transmisión de conocimientos, sino además **la huella formativa que dicho proceso de transmisión debe dejar impresa en el educando**. Pero dicho enfoque exige ya, no sólo el conocimiento de las materias a enseñar, sino también el de la psicología del sujeto a quién se enseña.

La introducción del concepto de pedagogía exige definir con mayor precisión la didáctica. Puig Adam distingue la didáctica estricta de las matemáticas, propia de los primeros genios



sistematizadores como Euclides, de la Didáctica pedagógica, cuyo nacimiento vincula a Pestalozzi y exige que se corrija la tendencia a acentuar cada vez más la separación entre dos procesos que jamás debieron divorciarse: el de la **génesis** de los conocimientos y el de su **transmisión** produciendo aberraciones que han perdurado durante más de un milenio, como lo es la transmisión de las síntesis euclídeas a niños y más tarde a niñas de edades en torno a los 12 años, sin tener en cuenta que los alumnos de Euclides no fueron precisamente niños. En la misma línea encontramos la propuesta de Imre Lakatos.

Afirma Puig Adam que el **modo** heurístico tiende a acercar nuevamente los dos procesos y es por ello el modo que mejor responde a las leyes biogénicas de los **métodos** cíclicos que, establecen la continuidad en el estudio de las materias sin fraccionarlas en cotos separados, así como el uso preponderante de la intuición en los primeros años y la evolución progresiva de los métodos que, sin discontinuidades ni saltos bruscos, permiten desarrollar las actividades psicológicas del niño o niña, gradualmente, desde su infancia hasta la Universidad, haciendo pasar al educando por un proceso de formación de conceptos análogo al experimentado por la Humanidad. Más tarde la teoría de la elaboración de Reigelutz sentará las bases de cómo realizar ese recorrido cíclico, más bien en espiral, con la ayuda de conceptos como epítome y sucesivas profundizaciones, en la línea de Decroly quien, recordemos, defendía el aprendizaje desde lo global a lo particular.

Sus principios pedagógicos y su experiencia didáctica en el campo de las Matemáticas, llevaron a Puig Adam, en 1955, a elaborar su **Decálogo de la Didáctica de la Matemática**, cuyas afirmaciones se reproducen a continuación:

- 1) No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.
- 2) No olvidar el origen de las Matemáticas ni los procesos históricos de su evolución.
- 3) Presentar las Matemáticas como una unidad en relación con la vida natural y social.
- 4) Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
- 5) Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
- 6) Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
- 7) Promover en todo lo posible la autocorrección.
- 8) Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
- 9) Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.



10) Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.



Antes de abandonar este paseo por la Didáctica Matemática Clásica, recomiendo completarlo con el visionado de **Vídeo 2** “Citas de grandes educadores” (Pulse [aquí](#) para ver el vídeo) y **Vídeo 3** “Grandes pedagogos” (Pulse [aquí](#) para ver el vídeo).

En el siguiente punto se explican los hitos más importantes de la Didáctica Fundamental.

3.2. Didáctica fundamental

3.2.1 Cockroft

Aunque la actividad a desarrollar en el aula esté bien planificada, se suelen dar situaciones imprevisibles, en las que la persona docente tenga que “improvisar”. Como improvisar sin tener suficientes métodos de enseñanza puede resultar peligroso, el informe Cockroft, en los 80 del siglo pasado recomendaba a los docentes pertrecharse del mayor bagaje posible de métodos de enseñanza a incluir en la planificación del trabajo de aula, de forma que las circunstancias de “improvisación” resulten lo menos peligrosas posible.

El informe, defensor de métodos innovadores, no desdeña los métodos tradicionales, pues cada uno tiene su lugar y su momento, así, recomienda la destreza en el manejo de métodos como:

3.2.1.1 Clase magistral

Éste método, aunque criticable como método único, es beneficioso en determinados momentos del ejercicio didáctico. Por ejemplo para recoger, completar, redondear y sistematizar los resultados obtenidos por el grupo aula en su actividad, desarrollada bajo otros métodos como puedan ser la resolución de problemas, el desarrollo de proyectos o la realización de investigaciones.

3.2.1.2 Consolidación de rutinas

Aunque no nos cansaremos de repetir que las matemáticas que deben aprender los chicos y chicas en edad escolar no se reducen a la mera repetición de cálculos rutinarios, también es



cierto que para que el conocimiento progrese adecuadamente, es necesario que el pensamiento adquiera esquemas automáticos, entre los que las rutinas de cálculo son esenciales. Por ello, no deben abandonarse las tareas de consolidación de rutinas, que siempre pueden conducirse lúdicamente, con juegos de mesa adecuados, huyendo de las aburridas repeticiones que se viven como castigos de una escuela decimonónica. Es imprescindible la sensación de logro personal, de éxito, de descubrimiento excitante en medio de un juego divertido.

3.2.1.3 Trabajo individual

El conocimiento es relacional, no sólo en las redes neuronales en donde vive sino en la propia sociedad. No obstante, las redes establecen relaciones entre sus nodos. El trabajo individual es imprescindible, tanto para formar parte de la red, del grupo de aprendizaje, como para establecer los módulos de conocimiento entre los que se establecerán las relaciones de un conocimiento significativo y una memoria duradera.

3.2.1.4 Trabajo en grupo

El trabajo en grupo, el trabajo cooperativo es el método de enseñanza que garantiza el aprendizaje activo, gracias a que permite la confrontación de ideas entre iguales, posibilita la producción exitosa de conocimiento socializado y prepara para la inmersión en un mundo complejo en el que ya nadie sabe de todo y la mayoría de los expertos saben casi todo de casi nada.

El trabajo en grupo debe estar bien planificado, con roles distribuidos entre sus miembros, como si de un equipo de trabajo se tratara. El o la profesora debe saber contenerse para ayudar a que los grupos generen sus propuestas y cada cual disfrute de sus logros personales o grupales. La labor docente tiene tres fases: la preparación previa de las situaciones didácticas, la moderación del trabajo de los grupos en el aula, procurando que alternen las fases de trabajo en grupo y las de trabajo individual, y, por último, la recapitulación en el gran grupo sobre los saberes conseguidos.

El método de proyectos es especialmente adecuado a este método de organización del trabajo en el aula.



En esta presentación de Carlos Morales podéis profundizar en éste método. Pulse [aquí](#) para ver la web.



3.2.1.5 **Resolución de problemas**

Existe gran cantidad de literatura sobre la didáctica de la resolución de problemas. Las mejores aportaciones, a grandes rasgos, coinciden en lo fundamental: Pappo, Descartes, Poyla*, Burton, Schoenfeld, Guzmán, Grupo Cero, etc.



*Pulse [aquí](#) para ver la web.

Todos ellos dedicaron mucha energía al análisis, pero nunca se despistaron de la máxima básica: “a resolver problemas se aprende, resolviendo problemas”.

Y también están de acuerdo la mayoría de expertos en didáctica de las Matemáticas, que aprender Matemáticas es, fundamentalmente, aprender a resolver problemas. Y existe otro acuerdo esencial: hay que tener claro qué cosa es un problema, respecto a lo cual hay diversas concepciones, pero la intersección de todas ellas contiene siempre el requisito de que quien se enfrenta a la resolución de un verdadero problema, tiene claro que no sabe a priori cómo resolverlo.

Lo que para unos es un mero ejercicio mecánico de aplicación de un algoritmo, para otros puede ser un verdadero problema; el problema puede venir planteado en un enunciado o proceder de una situación didáctica previamente preparada por el maestro o la maestra; también puede haber surgido en el proceso de desarrollo de un proyecto. En todos los casos, debe existir la dificultad, el desafío, el reto, y éste debe ser comprendido y aceptado.

Por otra parte, lo que importa mientras se aprende a resolver problemas, es más ese camino único e irrepetible seguido por quien aprende, que el resultado, o resultados del problema mismo. Camino difícil de evaluar en pruebas escritas, en contextos hostiles y con tiempos limitados.

Llevamos largo trecho hablando del procedimiento de resolución de problemas, aceptando tácitamente que estamos de acuerdo en la convención que existe tras ese término, pero, ¿lo estamos?, ¿qué significa resolver un problema?, ¿qué es un problema?, ¿lo que es un problema para unos lo es también para el resto? ¿Y la solución?, ¿es la solución un concepto claro?.



A continuación encontréis un vídeo con una disquisición sobre qué cosa no es un problema. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.



Y el siguiente enlace contiene una colección clásica de problemas divertidos. Pulse [aquí](#) para ver la web.

3.2.1.6 *Aprendizaje basado en proyectos*

Ya he dicho más arriba que un proyecto es el resultado de un proceso de creación y búsqueda personal o en grupo, presentado en forma de informe escrito, para el que es necesario usar materiales referenciales de apoyo a la elaboración del proyecto, que va a ser desarrollado a lo largo de un tiempo negociado con el profesor o la profesora, quien va a supervisar el trabajo a lo largo del proceso.

Precusores del método de aprendizaje por proyectos son Freinet, que defendió la máxima de que “el niño/a es generador de su texto” y Kilpatrick que afirmó la capacidad de los niños y niñas de aprender generando sus propios proyectos.

La elección adecuada de los proyectos, en vistas a que las actividades que surjan en su desarrollo recubran todo el programa de contenidos, reducirá la ansiedad del docente novel, respecto al cumplimiento o no del programa, materializado casi siempre en el libro de texto. Una fuente clásica de propuestas de proyectos para aprender matemáticas por éste método es el libro 101 proyectos, de Brian Bolt.

3.2.1.7 *Investigaciones*

Las investigaciones pueden ser consideradas dentro del método de resolución de problemas, pueden darse como situaciones o problemas abiertos, propuestas por el profesor/a, el alumno//a o surgidas en el seno de un proyecto.

En los ochenta el informe Cokroft vino a dar un toque de atención, como he dicho antes, apostaba por una forma nueva de enseñar las matemáticas, sin despreciar las herramientas tradicionales: cada cosa a su tiempo y en su lugar. Este toque de atención contribuyó considerablemente a que se rescataran las investigaciones y propuestas que estaban en marcha desde los sesenta y que arrojaban luz sobre los distintos aspectos que el informe proponía vigilar: Ello provocó una cascada de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que pusieron su acento en distintos aspectos de esta disciplina: Freudenthal, Castelnuovo y Boero del Grupo Génova, centraron su trabajo en introducir en el aula las actividades sobre Matemáticas de la realidad, de la vida cotidiana; Bell elaboró su teoría sobre la enseñanza por diagnóstico; Fielker mostró la capacidad de estudiantes de niveles de



primaria y secundaria para realizar investigaciones; Los estándares curriculares de EEUU (**NCTM***) se convirtieron en modelo de diversas reformas educativas; Reigeluth publicó su teoría de la elaboración; Guy Brouseau acuñó la expresión situaciones didácticas, que dio paso a una nueva etapa en la investigación de la Didáctica de las Matemáticas; la Didáctica fundamental. Desde Freudenthal, todos ellos hicieron hincapié en la necesidad de seleccionar cuidadosamente los problemas que iban a conducir a los y las estudiantes a hacer Matemáticas y a progresar paulatinamente en su comprensión, construyendo así no sólo su conocimiento matemático sino elevando el nivel de su capacidad de aprender a aprender.



* Pulse [aquí](#) para ver la web.

3.2.2 Situaciones didácticas

Es necesario distinguir dos tipos de situaciones didácticas:

3.2.2.1 Tradicional

Enfocada a la transmisión de conocimientos. Paulo Freire opina al respecto que la educación por trasmisión convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor/a, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán. En el caso particular de las matemáticas son multitud los investigadores que opinan de igual modo, por ejemplo Leone Burton:

“este modelo de enseñanza (el tradicional) puede ser ilustrado por las dos imágenes siguientes. Una es la imagen del recipiente vacío que se llena –representa la transmisión de los conocimientos del profesor/a a la alumna/o- la otra es la de la cebolla que se pela, en alusión al proceso de descubrimiento. Algunos profesores utilizan una combinación de ambas; la primera para transferir conocimientos y capacidades, la segunda para ayudar al alumno con dificultad a recuperar los conocimientos ya enseñados... La insistencia sobre la exactitud... a la vez de la solución y el método, es coherente con este modelo de enseñanza. Es coherente también la evaluación por exámenes del conjunto de los conocimientos y capacidades definidas por el programa.

(Burton, L, p.)



Constructivista: enfocada a la construcción de conocimientos. Otra vez citaré a Leone Burton:

Se ha recurrido, más recientemente, a una metáfora diferente, la de la construcción y la exploración, para impugnar las suposiciones subyacentes a los conceptos de transmisión y descubrimiento. Con la exploración y la construcción, se centra el interés en el proceso más bien que en el resultado, en las alternativas más que en las soluciones únicas. No se considera a las alumnas y alumnos ya como recipientes vacíos, sino como pensadores vivos y profundos, que intentan dar un sentido a lo que es nuevo en el contexto de lo que ya se conoce. Por lo tanto, el contenido no puede ya describirse de la misma manera puesto que es creado por una investigación personal, que resulta de las cuestiones que el alumno se plantea. En clase, por lo tanto, se espera que el alumno/a se comprometa en un proceso de construcción de su comprensión. El papel de quien enseña es, entonces, proporcionar los recursos necesarios para animar y estimular a l@s alumn@s, mientras ést@s trabajan en una resolución que les es personal y que cruza distintos conflictos cognoscitivos. El enseñante pasa más tiempo en estimular a su alumnado, individualmente o en grupo, que en informar a la clase entera. Estas observaciones e interacciones le permiten decidir las actividades pertinentes para los alumnos. Este estilo de clase valora la intuición, las preguntas y la imaginación para solucionar estas cuestiones, la creatividad de las criaturas, expresada a la vez por la elección de sus métodos y por la comunicación de sus resultados.

(Burton, L, p.)

Esta propuesta está claramente estructurada en el modelo de Guy Brousseau, cuyo concepto clave es **la situación didáctica** que se pone en valor cuando contemplamos junto a ella la situación a-didáctica y las relaciones que entre ellas se establecen:

- **Situación didáctica** : se refiere al conjunto de interrelaciones entre profesor/a- alumno/a- y medio didáctico. El docente es el encargado de crear el medio didáctico en el que el alumno o alumna van a construir su conocimiento.
- **Situación a-didáctica** : El o la estudiante se enfrenta al medio didáctico en el que, desde sus conocimientos previos, hará hipótesis, establecerá conjeturas, buscará argumentos para defenderlas, pruebas o refutaciones sin



ayuda expresa del profesor/a y con el objetivo de institucionalizar los conocimientos adquiridos.

- **Institucionalización:** En la situación didáctica que involucra al aprendiz en el medio preparado por el o la docente, se genera la situación a-didáctica en la que quien aprende lo hace por sí mismo gracias a las condiciones generadas por la situación didáctica, siempre que el medio esté correctamente diseñado para esa situación didáctica. Cuando los estudiantes ya han construido su conocimiento, el docente clarifica conceptos, formaliza, comenta, dirige el proceso de presentación de los resultados para que quede todo lo trabajado en orden, tanto lo generado por esa situación didáctica como el conocimiento relacionado con ella y procedente de situaciones didácticas anteriores. Es el final del proceso, el momento de la institucionalización del conocimiento nuevo.

Con antelación al diseño del medio didáctico, existen dos procesos que lo hacen viable: la transposición didáctica y el contrato didáctico.

- **El contrato didáctico**  se refiere a las reglas del juego, implícitas o explícitas, establecidas entre profesor/a y alumno/a. Comprende el conjunto de comportamientos que el profesor/a espera del alumno/a y el conjunto de comportamientos que él o ella espera del docente.
- **La transposición didáctica**  es lo que los alumnos del Grado de Maestro/a de Primaria deberán aprender a discernir para que los saberes aprendidos en la asignatura de Matemáticas, con el apoyo de esta asignatura, Didáctica de las Matemáticas, puedan ser transformados en las propuestas de aprendizaje que conducirán a sus alumnos a la adquisición de sus propios saberes matemáticos.

3.3. Didáctica ecléctica

3.3.1 Epítome sobre los programas de investigación

Cualquier **programa de investigación*** parte de unas premisas que pertenecen al campo de la ideología de los y las investigadoras que trabajan en ese programa. Esas premisas les



llevan a posicionarse, en el caso de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, de manera explícita o implícita sobre los siguientes aspectos:

- 1) una ontología general,
- 2) una epistemología general,
- 3) una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas,
- 4) **una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza en general y de las matemáticas en particular,**
- 5) una definición del objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas y
- 6) una metodología de investigación.



* Pulse [aquí](#) para ver la web.

En la siguiente tabla veremos un resumen de dicho posicionamiento en los principales programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Dichos programas se distinguen por su enfoque, así, tenemos: el programa de enfoque cognitivo, el constructivismo radical, el constructivismo social, el enfoque sistémico, el enfoque antropológico, el enfoque semiótico y el enfoque crítico.

El aspecto más relevante a efectos de esta asignatura es el de la teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas:



ASPECTOS PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN:	ONTOLOGÍA GENERAL	EPISTEMOLOGÍA GENERAL.	TEORÍA SOBRE LA NATURALEZA DE LAS MATEMÁTICAS	TEORÍA SOBRE EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.	DEFINICIÓN DEL OBJETO DE INVESTIGACIÓN	METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> - Cognitivo: individualista - Piaget: etapas desarrollo - Gestalt: comprensión súbita tras reestructuración por reflexión. - Bruner: currículo en espiral. - Norman: esquemas - Reigeluth: tª elaboración 	<p>Realismo: Mundo objetivo y predeterminado</p>	<p>Representacionismo: Tradicional, su pregunta es ¿cómo se representan los individuos el conocimiento?</p>	<p>Construcción: Todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos, de los que surgen las ideas matemáticas</p>	<p>Constructivista: Tª del aprendizaje: es significativo cuando el nuevo contenido se integra en un esquema cognitivo ya existente en la mente del sujeto. Punto de vista casi trivial. Tª de la enseñanza: De lo global (epítome) a lo particular (niveles de profundización)</p>	<p>Las representaciones mentales individuales de los alumnos y de los profesores.</p>	<p>Psicoestadística.</p>
<p>Constructivismo radical Piaget: epistemología genética.</p>	<p>La función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir una realidad.</p>	<p>Rechaza que estamos progresando hacia una visión cada vez más exacta de la manera en que las cosas realmente son; el conocimiento que se supone verdadero es aquel que es útil o viable para permitirnos dar sentido a nuestras experiencias y hacer predicciones.</p>	<p>Falibilismo. Las matemáticas han llegado a ser un asunto de comunicación e interpretación, y no sólo de justificación lógica.</p>	<p>Constructivista complejo y radical. Tª aprendizaje: el alumno/ construye Tª enseñanza: el/la profesora facilita.</p>	<p>Las construcciones de los sujetos.</p>	<p>De tipo interpretativo y cualitativo, pero en este caso la subjetividad del investigador está claramente contemplada.</p>



<p>Constructivismo social Ernst, Lakatos Bishop Vygotsky El Calendario: una construcción social de la medida del tiempo.</p>	<p>Relativista moderada. Fenomenología social que supone un mundo compartido y socialmente construido, en el que se forma el sujeto.</p>	<p>Falibilista: asume el conocimiento objetivo como aquel que es aceptado socialmente.</p>	<p>Las matemáticas se consideran como una construcción social de tipo falibilista.</p>	<p>Tª del aprendizaje: constructivista. Pone el énfasis en la importancia del lenguaje y de la interacción social. Tª de la enseñanza: importancia de la interacción social en la construcción social realizada en el aula.</p>	<p>La construcción social realizada en el aula.</p>	<p>De tipo interpretativo o bien investigación-acción.</p>
<p>Sistémico Brousseau: didáctica fundamental Chevallard; transposición.</p>	<p>No cuestiona la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado, pero introduce la suposición de la existencia de sistemas.</p>	<p>Representacionismo: su teoría de la verdad es la de correspondencia. Postula la existencia de una situación fundamental que da sentido al contenido matemático.</p>	<p>Las matemáticas, que son consideradas como una actividad que se ocupa de resolver problemas. No se problematiza la naturaleza de las matemáticas.</p>	<p>Situaciones didácticas, contrato didáctico, transposición didáctica: Tª del aprendizaje: adopta un punto de vista constructivista cuasi-trivial con relación a la génesis del conocimiento individual. Tª de la enseñanza: se limita a considerar que el trabajo del profesor consiste en realizar la transposición didáctica de manera que se facilite la apropiación de la situación por parte del alumno.</p>	<p>El estudio de los fenómenos ligados a la producción y la comunicación de los conocimientos matemáticos en los sistemas didácticos.</p>	<p>De tipo positivista ya que suponen que los fenómenos didácticos se pueden explicar de manera causal y que las causas fundamentalmente son de tipo matemático.</p>



Antropológico Chevellard Bishop	Problematiza el punto de vista tradicional que considera la existencia como una relación.	Cuestiona el representacionismo y la teoría de la verdad como correspondencia. Y tiene un fuerte componente pragmatista.	Las matemáticas se consideran como una actividad humana realizada en ámbitos institucionales.	Adopta un punto de vista constructivista no-trivial con relación a la génesis del conocimiento individual. Tª del aprendizaje: aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. Tª de la enseñanza: la tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción.	El estudio de la actividad matemática, sus distintos componentes así como sus condiciones de producción y reproducción.	La metodología que proponen es de tipo positivista.
Semiótico Godino y Batanero	Problematiza el punto de vista tradicional sobre la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado ya que sus referentes, Wittgenstein, etc., así lo hacen.	Su epistemología cuestiona el representacionismo y la teoría de la <i>verdad</i> como <i>correspondencia</i> y su teoría sobre el significado es de tipo pragmatista.	Las matemáticas se consideran como una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado	Tª del aprendizaje: construir significados personales. Constructivista no-trivial Tª de la enseñanza: procurar que los significados personales se aproximen al significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar	El estudio de la actividad matemática de manera extensiva y descriptiva.	La metodología que proponen es de tipo interpretativo.



<p>Crítico</p>	<p>problematiza la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado ya que sus referentes, Habermas, así lo hacen</p>	<p>Cuestiona el representacionismo y la teoría de la verdad como correspondencia y su teoría sobre el significado tiene un fuerte componente pragmatista</p>	<p>Las matemáticas se consideran como una actividad de resolución de problemas socialmente compartida que tiene que ser una herramienta para la emancipación democrática</p>	<p>Adopta un punto de vista constructivista no-trivial con relación a la génesis del conocimiento individual y social, ampliando la exploración de la construcción de significados con una perspectiva sociopolítica, complementaria a la construcción personal y social que se realiza en el aula.</p>	<p>El estudio de la red institucional de prácticas de la educación matemática.</p>	<p>Conlleva en muchos casos la implicación personal del investigador en la investigación-acción que realiza.</p>
-----------------------	--	--	--	---	--	--



Los intentos de síntesis entre las posiciones centradas en el sujeto de inspiración piagetiana y las posiciones que consideran como punto de partida un proceso de enculturación, no son fáciles, ya que es muy diferente la **interacción** que parte del sujeto y se materializa cuando éste interactúa socialmente, que considerar una **intersubjetividad** que se ha estructurado históricamente, en la que se forma el sujeto.

3.3.2 Primer nivel de profundización: un currículo enculturizador

3.3.2.1 Justificación

Tal vez aprender Matemáticas sea todas esas cosas y la Didáctica de las Matemáticas deberá desarrollar programas que den cuenta de todas ellas en un corpus coherente y compacto

En esta asignatura, dada la falta de integración de los distintos programas de investigación, nos posicionaremos en un punto de vista ecléctico, integrando las propuestas que puedan configurar un panorama que se completa gracias a ese eclecticismo, y, dado el carácter internacional del Grado de Maestro/a de Primaria, nos decantaremos por tesis socio-político-culturales. Una visita al museo pedagógico Comenius, en Praga, decantará al estudiante en esta vertiente. Tan clara se ve en su exposición la interdependencia de lo pedagógico, lo cultural, lo político y lo social, que una historia de la pedagogía en Chequia, se convierte en una historia política o cultural o social europea, dada la ubicación del país entre las potencias que han dominado los hechos en el continente. Interesantes especialmente son los momentos de crisis social, de acoso político -con la correspondiente imposición la de ideología propia en el sistema educativo- o de la decadencia de la cultura autóctona, es en esos momentos donde tienen su origen las revoluciones sociales, los cambios políticos, las reivindicaciones de la cultura nacional, pero es también cuando surgen los grandes pedagogos revolucionando los métodos de enseñanza que les precedieron.

De mediados de la década de los cincuenta, en que Puig Adam, en España, afirmaba que el maestro o la maestra deben adquirir no sólo el conocimiento de las **materias** a enseñar, sino también el de la **psicología** del sujeto a quién se enseña, se ha hablado mucho, el mundo ha cambiado, se ha globalizado económicamente, lo cual ha conllevado la coexistencia de individuos de diferentes **culturas** en diversos ámbitos de la vida pública y en particular en el sistema escolar, lo que exige integrar en el currículo esa variable, la de la multiculturalidad.



En los años setenta se discutió mucho acerca de la necesidad de conocer la **Historia interna de las Matemáticas**, en la asignatura de Matemáticas del Grado de Maestro/a de Primaria, se introducen porciones de esa historia relacionadas con los momentos clave de su evolución. La intención es acercar los procesos de génesis del conocimiento matemático y el propio proceso evolutivo de las capacidades psicomatemáticas del educando. Pero esa historia puede ser muy distinta en cada cultura, sobre todo en las fases correspondientes al currículo nulo y, éste, está intrínsecamente ligado a la cultura de origen del educando, por tanto a las componentes de esa cultura que White agrupa en cuatro categorías: ideológica, sociológica, sentimental y tecnológica.

En un curso como el presente, por ser internacional, en un mundo globalizado, es obvio que la variable multiculturalidad estará presente, por lo que es adecuado dar a conocer aunque someramente, los conceptos de Etnomatemáticas y Currículo Enculturizador:

3.3.2.2 Etnomatemáticas

SHIRLEY

En los 90, Lawrence Shirley afirma que << la etnomatemática, intenta ampliar el significado de la matemática académica para mirar por la matemática en todas partes y en todas las culturas. Esta amplia definición necesita no estar limitada a las culturas foráneas o del tercer mundo>> (1991, julio, p.88-89); además considera <<justo bajo nuestras propias narices nuestros niños [niñas] tienen su propia cultura. Más que ignorarla, necesitamos conocerla y demostrar que ahí también hay matemáticas>> (1991, julio, p.89).

Según Vithal y Skovsmose las etnomatemáticas se refieren a un conjunto de ideas acerca de la historia de las matemáticas, las raíces culturales de las matemáticas, las matemáticas implícitas en los escenarios cotidianos y la enseñanza de las matemáticas.

Las etnomatemáticas no sólo se refieren a una perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, sino también a las matemáticas implícitas en un grupo cultural.

CLAUDIA ZAVLAVSKY

Esta etnomatemática americana, estudió las relaciones entre las matemáticas de diversas culturas del mundo en su obra "Africa Counts".

En ella menciona las medidas corporales para medir longitudes, como el mukono, equivalente al codo, en la tribu de los ganda en Uganda; En Etiopía nos habla de una



canasta que contiene 4,5 kilos; un paquete de granos de café; un cesto de boniatos. Todas ellas medidas estándar para las gentes del lugar, pero, esa imprecisión evidente en estas medidas se compensa con un antiguo proverbio de esta cultura: “ Mide diez veces y corta el paño sólo una”.

En cuanto a la moneda en África, Zaslavsky nos habla de: cuentas, varillas de latón, paño, monedas, armas de fuego y alcohol, azadas, barras de hierro, discos de marfil, ganado, pulseras, rupias, sal y otros. No aparece el término “personas” que sí han sido moneda de cambio, al menos en los tratos durante el comercio de esclavos, pero eso, tal vez, es porque no eran considerados personas, sino ganado.

Para medida del tiempo constata Zaslavsky que no existe un sistema correlacionado de unidades y comunica que las unidades de medida están vinculadas con una escala temporal natural, del mundo vivo, donde se deben tomar en consideración otros valores distintos al dinero, es por lo que se encuentran semanas de tres, cuatro, cinco, seis, siete u ocho días. Es evidente que no se considera necesaria la precisión que ofrecen los sofisticados relojes digitales de hoy.

TRES LÍNEAS

Patrick Scott (1988, octubre, p.40) identifica tres tendencias¹ en las que se pueden ubicar las diferentes interpretaciones del término hasta el momento: la de D'Ambrosio/Gerdes de etnomatemáticas para una reafirmación cultural, la de Claudia Zaslavsky de etnomatemáticas para ‘llevar el mundo al aula de matemáticas’, y la de Marcia Ascher de etnomatemáticas como el estudio de las matemáticas de los pueblos iletrados.

3.3.2.3 Enculturización matemática: componentes del currículo enculturizador de matemáticas (CEM)

Dice M^a Luisa Oliveras que “Su interés es innegable tanto para todos los involucrados en el circuito profesional de la educación, como para los padres o ciudadanos con hijos en cualquier edad, para los adultos que quieren evolucionar en su propia formación, para los políticos, los pensadores, los comunicadores de masas, los ecologistas y publicistas, los vendedores de cualquier producto, los diseñadores de espacios-tiempos de ocio, los

1 Citada por I. M. Suarez, et al. (2009). Etnomatemática, Educación Matemática e Invidencia. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 2(2). (p.18-51)



estrategias de la dominación, todos nos preguntamos cómo se consigue penetrar en las vidas de los grupos de personas y llegar a formar parte de sus referentes y de sus conductas, de sus valores y de sus emociones.

Y a lograr esto le llamamos educar, enseñar-aprender, **enculturarse** en un grupo social que ya posee este bagaje global o cualquier manifestación parcial, matemática en nuestro caso.”

Este es un punto de vista radicalmente distinto de la <<creencia en la transmisión del conocimiento matemático mediante la comunicación asimétrica del caudal de saber que un texto o un profesor ha logrado acumular para sí>>, el cual <<funciona solo cuando el alumno ya ha acumulado un cauce de interpretación que le permite decodificar el mensaje>>

Alan Bishop, en su obra ya clásica “Enculturación Matemática”, y en la línea de la etnomatemática de Claudia Zaslavsky, propone la elaboración de un currículum que esté atravesado por tres componentes: simbólica (ligada a las actividades invariantes en todas las culturas y al par de valores racionalismo-objetismo); social (ligada a proyectos y al par de valores control-progreso) y cultural (ligada a investigaciones y al par de valores misterio-transparencia).

La componente simbólica se manifiesta, según Bishop, a través de seis actividades matemáticas, presentes en el desempeño de todas las culturas. Actividades que hoy, en el ámbito de la Etnomatemática, se denominan actividades matemáticas invariantes y que, por supuesto, también están presentes en cualquier subgrupo cultural.

Estas actividades básicas e invariantes son, según Bishop:

- **Contar:** Nombres. Nombres para los números. Pautas. Bases. Sistemas numéricos. Cuantificadores. Magnitudes discretas. Vemos aquí la posibilidad de aprovechar el currículum nulo para el primer bloque de contenidos de ésta asignatura.
- **Medir:** Orden. Tamaño. Unidades. Sistemas de medida. Precisión. Magnitudes continuas. Aquí encontraremos la manera de introducir los contenidos del tercer bloque de ésta asignatura.
- **Localizar:** Dimensiones. Coordenadas. Ejes. Caminos. Redes. Simetría. Topología. Distancia y dirección. Lugares geométricos. El segundo bloque de contenidos de Didáctica de la matemática tiene aquí una fuente inagotable



de recursos extraídos del currículo nulo, para confeccionar actividades de introducción.

- **Diseñar:** Forma. Regularidad. Pautas. Construcciones. Dibujo. Representaciones. Geometría. El segundo bloque de contenidos de Didáctica de la matemática tiene aquí una fuente inagotable de recursos extraídos del currículo nulo, para confeccionar actividades de introducción.
- **Jugar:** Reglas. Procedimientos. Planes. Modelo. Estrategias. Habilidades. Descubrimiento, Satisfacción. Competición. Cooperación. El bloque de Resolución de problemas encuentra en los juegos propios de cada cultura su origen genuino y el gusto por el reto, por el desafío, así como el interés por elaborar estrategias de éxito.
- **Explicar:** En todas las culturas existe la actividad de “explicar” aquello que se sabe, se siente o se pretende, al resto de personas del grupo, sobre todo, si se trata de explicaciones valiosas para la supervivencia del grupo, se les “explica a las y/o los jóvenes del grupo”. La competencia relacionada con la comunicación, encontrará aquí un suministro ingente de ocasiones para introducirla y ejercitarla. En cuanto al contenido, en cualquier explicación intervienen clasificaciones, convenios.(jerga técnica para aclarar, no para confundir), argumentos (razonamiento crítico), lógica (con sus conectivas), pruebas (conjeturas/hipótesis, demostraciones, contraejemplos,...), relatos (habitualmente en boca de las ancianas de los grupos, que reciben y transmiten , la mayor parte de las veces oralmente, el legado cultural de su grupo). Es pertinente hablar de estos contenidos por cuanto dicen acerca de la producción matemática inherente a las explicaciones.

La componente social

Esta componente hace alusión al uso de las matemáticas, se manifiesta distinta en el pasado, en el presente y en el futuro.

La sola aproximación conceptual no significa mucho a nivel de enculturación matemática, puesto que no enfatiza un punto de vista crítico de los valores marcados por las Matemáticas en la sociedad. Esta perspectiva sólo puede ser abordada a través de una visión del valor de uso de las Matemáticas en las distintas sociedades, propiciando la reflexión sobre la construcción social de las Matemáticas en el pasado, el presente y el futuro; en particular la



imposición de culturas hegemónicas y la valoración de culturas que son rechazadas en la actualidad. Este tipo de reflexión conformaría el núcleo de este organizador, y tendría una elevada relación con la historia de las Matemáticas. Lo que aporta este modelo social a la componente simbólica es que, mientras esta última intenta cubrir todos los aspectos del currículo para la comprensión matemática, la primera pretende ejemplificar situaciones que desarrollen valores de uso de las Matemáticas obtenidos a través del devenir histórico o del desarrollo económico o social.

El medio más idóneo para realizar este tipo de aproximación social a la matemática es el del método de proyectos. Un proyecto es el resultado de un proceso de creación y búsqueda personal o en grupo, presentado en forma de informe escrito, para el que es necesario usar materiales referenciales de apoyo a la elaboración del proyecto, que va a ser desarrollado a lo largo de un tiempo negociado con el profesor o la profesora, quien va a supervisar el trabajo a lo largo del proceso.

Las aportaciones curriculares del método de proyectos son, fundamentalmente las siguientes:

- Permite una profundización personal, con lo cual se produce un adecuado tratamiento curricular de la diversidad en función de las distintas capacidades e intereses de cada alumno o alumna.
- Posibilita el uso de diversas fuentes y recursos que estimula la visión de la importancia de las Matemáticas como elemento de interpretación y valoración de la realidad, así como de sus conexiones con otras áreas curriculares.
- Proporciona un elemento crítico de reflexión sobre el poder de control y de progreso de las Matemáticas en la sociedad, y la relación con su auténtico poder y limitaciones explicativas y representativas. Es, por tanto, un modelo reflexivo que permite asumir ideas abiertas, democráticas y de toma de decisiones, esto es, con una interpretación ligada a una perspectiva externa del área.

Ya he dicho en el apartado del informe Cockroft el interés que tiene para el o la profesora novel la elección adecuada de los proyectos, en vistas a que las actividades que surjan en su desarrollo recubran todo el programa de contenidos, lo cual reducirá su ansiedad respecto al cumplimiento o no del programa, materializado casi siempre en el libro de texto.



En el pasado: podemos aprovechar estas actividades para trabajar la Historia de las Matemáticas bajo un punto de vista no etnocéntrico, no androcéntrico, no clasista, no dogmático e independiente del pensamiento único.

En el presente: podemos aprovechar las actividades que explican y hacen más comprensible el tecnificado mundo actual, analizándolo críticamente y desarrollando las capacidades necesarias para hacer competente al alumnado en el mundo de las nuevas tecnologías.

En el futuro: podemos proponer actividades de simulación, predicción, planificación, etc.

La componente cultural

La componente cultural, aquella que nos habla de la construcción de las Matemáticas, tiene dos vertientes:

- La construcción de aquellas Matemáticas no oficiales, no reconocidas como tales, que Bishop quiere recuperar para el currículo y a las que alude con el término cultura (con minúscula) y otros autores denominan como currículo nulo.
- Aquellas Matemáticas, oficialmente reconocidas, a las que Alan Bishop alude con el término Cultura (con mayúscula).

Esta componente cultural es una interpretación más interna del área, que puede llegar a abordar incluso aspectos de cultura matemática de nivel técnico. Se plantea más como un trabajo alrededor del cómo o por qué se generaron las ideas que sobre su utilidad, alude a la historia interna de las matemáticas, aquella que debemos tener presente para establecer el paralelismo entre los momentos históricos de las dificultades de determinados descubrimientos y la etapa evolutiva del educando en la que pretendemos que se produzca la comprensión.

Un tratamiento integral de ambas componentes, la social y la cultural, podría desarrollar adecuadamente el binomio **utilidad- belleza constructiva**.

El modelo de actividad que se propone, para integrar la componente cultural en el currículo, es el desarrollo de investigaciones. La investigación es, como el proyecto, el resultado de una búsqueda personal o de grupo, que se trabaja y se presenta de forma similar. No obstante, frente a la visión social de las aplicaciones y usos de las Matemáticas que supone el proyecto, la investigación pretende repetir alguna de las actividades de descubrimiento y



construcción explorada con anterioridad, supone la realización de una especie de puzzle matemático, mediante el que se desarrollan o aportan ideas matemáticas.

La función del profesorado supone garantizar que este tipo de trabajo aborde adecuadamente el tratamiento de la diversidad para que el trabajo sea fructífero. Para ello es preciso acotar y marcar vías de trabajo, teniendo en cuenta que en este modelo no existe un punto final, puesto que siempre es posible que puedan aparecer nuevas direcciones de investigación, otras cuestiones y otros puntos de vista.

La investigación consta de dos fases mucho más delimitadas que el proyecto:

- Una fase experimental, en que se expone la exploración, análisis y desarrollo de la idea matemática, y
- Una fase reflexiva, de informe propiamente dicho de la investigación, de formalización de la idea.

La investigación está también próxima al currículo basado en la resolución de problemas, ya que la resolución de un problema abierto deviene en investigación.

Dos son los tipos de investigación que proponemos potenciar en esta aproximación curricular:

- Investigaciones en la cultura matemática: las aportaciones anónimas de las artesanías, remarcando la importante contribución del pueblo trabajador, y en particular de las mujeres, en estas actividades (alfareras, multitarea, cestería, esteras, crochet, decoración cerámica, recolección, clasificación, ordenación, etc.).
- Investigaciones en la Cultura matemática, extraídas de libros de Historia de las Matemáticas y de **biografías de personajes***, tanto masculinos como femeninos.



* Pulse [aquí](#) para ver la web.

Tras este breve resumen sobre las didácticas general y específica de las matemáticas, y tras el trabajo en las asignaturas de Didáctica y Matemáticas del grado, daré unas pinceladas sobre el currículo oficial, sin ánimo de repetir lo visto en Matemáticas sino para complementar desde el punto de vista de la didáctica.



3.4. El currículo oficial de primaria

El diseño curricular base contiene las directrices de las enseñanzas mínimas que están compuestas por los aspectos básicos del currículo en relación con las competencias básicas, los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación.

En dicho diseño curricular se proyectan gran parte de las recomendaciones curriculares del mencionado proyecto NCTM.

Considero necesario dar una información somera sobre los objetivos y las competencias, así como sobre sus relaciones, pues es imprescindible para el maestro o maestra de primaria conocer estas relaciones, para poder discernir sobre contenidos y evaluación, según el método de enseñanza aprendizaje seleccionado en cada momento.

3.4.1 Competencias y objetivos

3.4.1.1 Competencias básicas

- Competencia en comunicación lingüística.
- **Competencia matemática.**
- Competencia en conocimiento e interacción con el mundo físico.
- Competencia en tratamiento de información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Competencia en autonomía e iniciativa personal.

3.4.1.2 Componentes de la competencia matemática (competencias matemáticas):

- PR: Pensar y razonar
- AJ: Argumentar y justificar
- C: Comunicar
- M: Modelizar
- RP: Plantear y resolver problemas
- R: Representar
- LS: Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico



- T: Emplear soportes y herramientas tecnológicas

Los **objetivos** se enuncian como el logro de una o varias capacidades, **ser capaz de** y expresan qué operaciones cognitivas, habilidades y conocimientos se espera muestre un sujeto, de una edad y nivel determinados cuando aborda tareas en contextos concretos.

3.4.1.3 *La enseñanza de las Matemáticas en la etapa de Primaria tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:*

- Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones y mensajes sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
- Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática o resolverlas utilizando los algoritmos correspondientes, valorar el sentido de los resultados y explicar oralmente y por escrito los procesos seguidos.
- Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas, que permitan disfrutar de los aspectos creativos, estéticos o utilitarios y confiar en sus posibilidades de uso.
- Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales de cálculo mental y medida, así como procedimientos de orientación espacial, en contextos de resolución de problemas, decidiendo, en cada caso, las ventajas de su uso y valorando la coherencia de los resultados.
- Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas.
- Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.



- Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

3.4.1.4 Relaciones entre competencias y objetivos

CAPACIDADES		PR	AJ	C	M	RP	R	LS
1	Expresar un número decimal en potencia de 10	X		X		X		X
2	Leer y escribir los números decimales	X		X				X
3	Reconocer y clasificar distintos tipos de números decimales				X	X		
4	Realizar operaciones básicas con números decimales					X	X	
5	Ordenar distintos números decimales y representarlos en la recta real	X				X		
6	Aproximar y redondear números decimales	X	X			X		
7	Saber aplicar los algoritmos de transformación: 1. Pasar de fracción a decimal 2. Pasar de decimal a fracción 3. Utilizar porcentajes tanto en forma decimal como fracción				X		X	X
8	Manejar la notación científica							X
9	Utilizar y reconocer números decimales en situaciones reales	X		X	X	X		

Tabla de capacidades asociadas a las componentes de la subcompetencia matemática numérica, en relación al contenido números decimales, según Rico-Lupianez.

Obviamente, si el trabajo con números decimales ha utilizado recursos tecnológicos, habría que añadir una columna con dicha competencia matemática (T), que comprende como máximo exponente actual a las tecnologías de la información y la comunicación, conocidas, en la jerga profesional como TIC.



N \ C	1	2	3	4	5	6
PR	Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos	Formar y relacionar conceptos
A				Elaborar argumentos basados en sus acciones	Formular razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde su propia reflexión
C		Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	
M				Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones	
RP	Resolver problemas con datos sencillos		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar y comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
R	Leer datos directamente de tablas o figuras	Usar un único tipo de representación	Conocer y usar diferentes sistemas de representación	Vincular diferentes SR, incluyendo el simbólico		Relacionar y traducir con fluidez diferentes SR
LS	Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar situaciones reales mediante símbolos		Dominar con rigor el lenguaje simbólico

Tabla de capacidades asociadas a los seis niveles de aprendizaje (N) de la competencia matemática, según Rico-Lupianez.

Cada uno de los niveles (N) está relacionado con capacidades que el alumno necesita para alcanzarlos, cuyos descriptores ocupan las celdas de la tabla, en las siete primeras componentes de la competencia matemática (C). Si se utilizan recursos tecnológicos, añadiremos la octava y última componente T.

Estos descriptores permiten establecer el nivel de competencia que poseen los escolares en matemáticas, por lo que también constituyen una potente herramienta desde el punto de vista de la evaluación.



3.4.2 Contenidos

Respecto de los contenidos curriculares de las Matemáticas en Primaria, cabe decir que es imprescindible que la maestra o el maestro que ha de impartirlos, debe conocerlos y ese es el principal objetivo de la asignatura Matemáticas del Grado de Maestro/a de Primaria. En los temas 2-5, trataremos la didáctica específica de cada uno de esos contenidos que deberán sufrir el proceso de **transposición didáctica** , es decir, los conocimientos matemáticos que posee el maestro o la maestra en relación a los contenidos a impartir deberán sufrir un cambio para ser adaptados como objeto de enseñanza. El proceso de trasposición consta de tres fases:

- Selección y secuenciación de las partes de las matemáticas que se van a enseñar en cada nivel escolar.
- Adaptación desde el lenguaje formal en que el profesional las conoce a un lenguaje comprensible a cada nivel e iniciar, en el último ciclo de Primaria, gradualmente, la formalización, comenzando por las propias propuestas del alumnado.
- Búsqueda de ejemplos, problemas, proyectos, investigaciones y situaciones que interesen a los niños/as y que les permitan apropiarse de los conocimientos pretendidos.

3.4.3 Recursos para el aula de Matemáticas en Primaria

Son recursos para el aula de Matemáticas los **libros de texto**, los **materiales manipulativos** (tangibles, gráficos y textuales), los juegos (de conocimiento y de estrategia) y los **recursos tecnológicos** (**fotografía***, vídeos, calculadoras, ordenadores, internet, reunidos todos ellos en el mundo de las TIC). El maestro en formación debe lograr una actitud propicia al uso de recursos de toda índole, incardinados como elementos de las situaciones didácticas, pero al mismo tiempo es necesario que construya una actitud crítica hacia el uso indiscriminado de tales recursos.

Respecto a los materiales tangibles manipulativos, merece la pena tener en cuenta la propuesta que hace M^a Antonia Canals en el libro que la FESPM editó en su homenaje, en 2009: *documents de treball de M^a Antonia Canals*. En este texto, en las páginas 30 a 38, la



autora desgrana las destrezas necesarias para la construcción del saber matemático y su relación con los materiales manipulables, tangibles:



* Pulse [aquí](#) para ver la web.

- Sensoriomotoras: percepción sensorial y movimiento. De 0 a 3 años el aprendizaje matemático consiste en consolidar estas destrezas que serán la fuente del aprendizaje matemático posterior. De 3 a 6 años empiezan a **ser conscientes y a relacionar mentalmente** los resultados de sus experiencias sensoriomotrices. Aquí ya hay una destreza matemática, un pensamiento de tipo matemático. Pero estas experiencias sensoriales se producen sobre los objetos que manipulan y el espacio que exploran. Tanto la motricidad como la manipulación de materiales es fundamental obviamente para el aprendizaje geométrico, pero también para el aritmético y para el aprendizaje sobre las medidas.
- De expresión: plástica, verbal y simbólico-matemática. La primera está relacionada naturalmente con las representaciones gráficas en general y geométricas en particular; la segunda desarrolla la capacidad de expresar verbalmente lo que han hecho, observado, pensado y descubierto, gracias a lo cual se puede concretar el pensamiento y se pueden generar conceptos, propiedades, relaciones, operaciones, cálculos, preámbulo del cálculo mental y del lenguaje simbólico con cifras y signos.

Pero a los 6-7 años, el paso de las destrezas verbales a las simbólico-matemáticas, requiere un mediador: los materiales manipulables, en los que la comprensión del número o de la operación descansa, invitando a repetidas experiencias que, de modo natural, exigirán abreviar con apoyo de la imaginación y por tanto invitarán a simbolizar.

Es importante que el uso del material, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática.

Las calculadoras y los ordenadores son altamente motivadores. Utilizados como recurso de situaciones didácticas bien diseñadas y bien gestionadas, son de un valor inestimable. Un ejemplo de buen uso de la calculadora en el aula de primaria lo podéis encontrar en el [artículo de Vicente Calixte Juan, publicado en el nº 1 de SUMA](#). Actualmente hablamos ya de



recursos TIC, en los que las tecnologías de la Información y la Comunicación están intervincladas y forman ya un universo propio. Un material TIC, elaborado por el MEC, en colaboración con las CCAA, para las Matemáticas en Primaria, lo podéis encontrar [completo aquí](#), en particular en este enlace encontraréis [recursos varios en línea](#). En la segunda parte, en el apartado de Situaciones didácticas de cada bloque, encontraréis algunos enlaces a este recurso, seleccionados en función del ciclo, y el bloque. Para cada uno de ellos existe una guía didáctica que os ayudará a utilizarlos correctamente.

Los materiales manipulables, los materiales interactivos como calculadoras y ordenadores equipados con programas de geometría dinámica o lenguaje LOGO y las TIC, se complementan para completar el proceso de aprehensión del concepto abstracto.

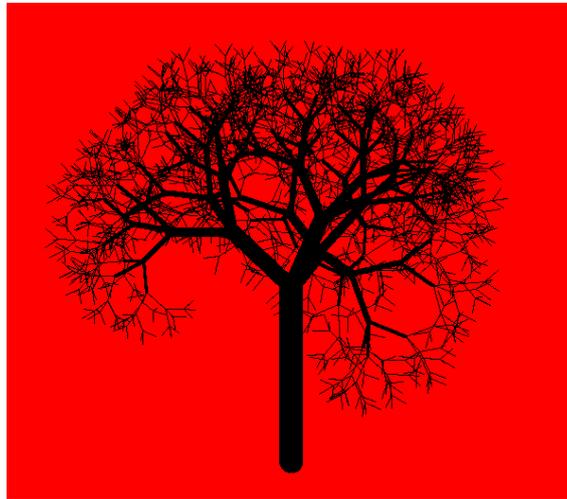


Ilustración 5. Árbol fractal realizado en LOGO por Eliseo Borrás- Ilustra la complejidad que nace de reglas simples y la naturalización que introduce una cierta dosis de azar. Fuente: Borrás, E., Moreno, P. y Nomdedeu, X (2002). en RITMOS. Matemáticas e Imágenes. Madrid. E. Nivola.



Un ejemplo de sitio para el estudio de la geometría con ayuda de las TIC es el de **José Antonio Mora**.

Pulse [aquí](#) para ver la web.

Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes se liberan de las tareas repetitivas, tediosas y pueden centrarse en pensar matemáticamente. Pero hay que administrar el tiempo sin olvidar que el objetivo es el aprendizaje de las Matemáticas, no de la tecnología.



La velocidad con que se quedan **obsoletos**, tanto **software** como **hardware**, como entornos de trabajo, supone también un problema para los docentes, que pueden llegar a invertir más tiempo en sus actualizaciones TIC que en la preparación de situaciones didácticas y secuencias de situaciones. Hoy ya se habla de la obsolescencia de la jovencísima web 2.0, frente al empuje de la web semántica, que es capaz de interactuar con el usuario como si la web fuera otro usuario con todos los conocimientos del planeta, es decir con un lenguaje natural y conocimiento del contexto. Una idea de la velocidad de obsolescencia, puede darla la lectura actual del libro **Matemáticas e Internet de la revista UNO de la editorial GRAO**.



Pulse [aquí](#) para ver la web.

En la Parte 2, en cada bloque, en el apartado de Materiales, encontraréis una relación de materiales adaptados al ciclo y bloque correspondientes.

Ya he advertido de que corremos el riesgo de convertir los recursos en objetivos en sí mismos, ahora quiero avisar de que huyendo críticamente del empirismo corremos el riesgo de caer en el formalismo, es responsabilidad del docente encontrar el equilibrio.

3.4.4 Evaluación

3.4.4.1 Coherencia con el método

La evaluación debe ser coherente con el método de enseñanza-aprendizaje puesto en práctica.

Si mantenemos el objetivo de educar a los y las estudiantes para que sean capaces de manejar los conocimientos adquiridos, de manera fundada, cuando se enfrenten con problemas del mundo real, tendremos que plantearnos que lo fundamental es la adquisición clara de los conceptos, para lo cual será necesario utilizar la metodología adecuada y el sistema de evaluación coherente, como bien se ha experimentado a lo largo de las cuatro últimas décadas en diversas Universidades europeas:

No es suficiente haber cambiado la forma de la enseñanza dentro de los marcos de la enseñanza corriente de clase si al mismo tiempo, por ejemplo, no se cambian las formas de examinar y los principios de elección del material para la enseñanza. Es uno de los errores clásicos en los procesos de reconversión, de los modelos tradicionales de enseñanza a los



modelos PBL (currículos basados en la formulación de problemas y organizados en base a proyectos). Existen muchos testimonios de profesores que han experimentado el PBL, utilizando el método sin cambiar fundamentalmente las formas de evaluación. Los estudiantes adivinan rápidamente el sistema y se desmotivan si éste no tiene consistencia, descubren el código de examen y se dirigen directamente hacia éste en vez de llevar a cabo los procesos de PBL (Kolmos, A., 2004).

3.5. Ejes transversales vertebradores del aprendizaje de las matemáticas

De los epígrafes anteriores se desprende la coherencia de esta propuesta didáctica con la propuesta que el profesor D. Manuel López Pellicer hace en la asignatura de matemáticas del Grado de Maestro/a de Primaria:

La enseñanza cíclica de las Matemáticas se vertebra por dos ejes transversales que están en todos los bloques, de modo que los contenidos estarán siempre relacionados y se construirán unos sobre otros.

3.5.1 Dimensión histórica, social y cultural

Un eje es la dimensión histórica, social y cultural de las Matemáticas, que debe presentar los descubrimientos en el contexto histórico y social en que se produjeron, enseñando a valorar las aportaciones de las diversas culturas. El alumnado de esta **etapa**  educativa debe adquirir conciencia de la perspectiva histórica de las matemáticas, y de su dimensión social y cultural.

3.5.2 Resolución de problemas

Otro es la resolución de problemas. Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática, por lo que deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa de Educación Primaria.



3.5.3 Experiencia

El sentido del **área**  Matemáticas en la Educación Primaria es eminentemente experiencial; los contenidos de aprendizaje toman como referencia lo que resulta familiar y cercano al alumnado, y se abordan en contextos de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista. Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para adquirir progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos. (López Pellicer, 2011, p. 47).





PARTE II

TEMA 1. ESTRUCTURA Y RECOMENDACIONES

Los próximos cuatro temas, desarrollan las técnicas, métodos y estrategias de las didácticas específicas de cada bloque de contenidos de la **asignatura**  Matemáticas del Grado de Maestro/a de Primaria.

Para mayor comodidad del alumnado estructuraré estos temas en dos partes que ayudarán a sistematizar el estudio y la práctica.

Desarrollo cognitivo y progresión de aprendizaje y contenidos matemáticos, recursos didácticos y situaciones didácticas.

Los contenidos vienen organizados en una tabla en cuyas columnas de entrada están los ciclos y en las entradas de las filas los epígrafes de los contenidos matemáticos que organizan el programa.

La tabla de cada bloque expone esquemáticamente los contenidos de dicho bloque, que el alumnado del Grado de Maestro/a de Primaria va a cursar en la Asignatura de Matemáticas y que constituyen el principal recurso para impartir la asignatura de Matemáticas en los cursos de Primaria.

Los recursos son un listado de recursos específicos para el bloque y en situaciones didácticas vienen ejemplos de actividades que podrían constituir el medio didáctico diseñado por el o la maestra.

Los materiales antes comentados serán un recurso imprescindible para crear situaciones didácticas apropiadas. Con todo ello y los modelos teóricos de Didáctica de cada bloque, se podrán crear situaciones didácticas acordes al nivel evolutivo o al nivel de aprendizaje de los alumnos respecto a dicho bloque. Tras los recursos, expongo algunos tipos de situaciones didácticas sobre las que reflexionar en torno a adecuación al nivel, conflictos cognitivos usuales, materiales adecuados y método de trabajo con los contenidos matemáticos. Para profundizar en ello y encontrar nuevas propuestas de situaciones didácticas, la obra en línea del profesor **Godino***, adaptada a los nuevos currículos, será de gran ayuda.



* Pulse [aquí](#) para ver la web.

En este tema se proponen también actividades generales, aplicables a todos los bloques;

Contextualización profesional

En cada bloque conviene que se desarrollen actividades como las propuestas a continuación:

- Analiza problemas escolares sobre algún tema del bloque.
- Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos problemas y elige 10 de tipos variados.
- Resuelve los problemas elegidos.
- Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
- Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
- Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
- ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

También es conveniente que el alumnado se auto-organice talleres de didáctica siguiendo la estructura siguiente, supliendo así la carencia de actividad práctica presencial propia de los cursos estándar:

- Análisis comparativo de textos escolares.
- Diseño de unidades didácticas.
- Diseño de actividades.
- Análisis didáctico de tareas escolares.
- Análisis de las dificultades de aprendizaje.
- Análisis y diagnóstico de los errores sistemáticos.
- Diseño de una evaluación.
- Análisis de problemas propuestos por niños.
- Análisis de estrategias de los alumnos.



- Evaluación de resolución de problemas.
- Análisis de una experiencia de enseñanza-aprendizaje.
- Análisis de las situaciones escolares.
- Investigación y creación de instrumentos de evaluación.
- Elaboración de un currículo enculturizador.

Dado el carácter en línea de este curso, los recursos en internet aparecerán en enlaces salpicando el texto. No obstante recomiendo el proyecto [CIFRAS](#), mencionado en el capítulo de recursos, elaborado por el MEC y las CCAA que contiene información curricular y enlaces para el **profesorado** y un conjunto de actividades para el **alumnado** de toda la Primaria, sin duda, de gran provecho para que creéis situaciones didácticas relacionadas con cada bloque del currículo y en todos los niveles de cada ciclo. Entre los enlaces recomendados por el proyecto CIFRAS, cabe considerar el del profesor [Martínez Recio](#).

TEMA 2. DIDÁCTICA DE LA ARITMÉTICA

El estudio de los sistemas numéricos, incluyendo su uso en las diversas situaciones de la vida diaria, ha sido históricamente una parte esencial de la educación matemática desde los primeros niveles. Esto es así porque todas las matemáticas que se estudian desde preescolar hasta el bachillerato están cimentadas en los sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales y reales). Los principios que fundamentan la resolución de ecuaciones son los mismos que las propiedades estructurales de los sistemas numéricos. De igual modo las medidas de magnitudes no son otra cosa que números y los datos estadísticos son en la mayoría de los casos información numérica contextualizada. Esto explica que la comprensión de los números, de las operaciones aritméticas y la adquisición de destrezas de cálculo formen el núcleo de la enseñanza de las matemáticas en la educación infantil y primaria. Los estudiantes deberán enriquecer progresivamente su comprensión de los números; esto implica saber qué son los números, cómo se representan con objetos, símbolos numéricos o sobre la recta numérica, cómo se relacionan unos con otros, el tipo de estructura que forman, y cómo se usan los números y las operaciones para resolver problemas. (Godino, 2004, p.159)

Los contenidos mínimos de la Aritmética en Primaria son:

- El conocimiento aritmético.



- Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales.
- Sistemas de numeración.
- Relación entre los números.
- Operaciones de cálculo y procedimiento del mismo (cálculo escrito, mental, estimación y calculadora).

2.1 Contenidos didácticos

2.1.1. Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje

En cuanto al abordaje por niveles, en el primer ciclo el niño debe aprender que el número tiene dos significados según el contexto: cardinal y ordinal. También debe aprender que el número sirve para contar y calcular. Tanto para lo uno como para lo otro, en el primer ciclo, el niño/a desarrolla la capacidad correspondiente pero se encuentra con bloqueos cuando los números son grandes, ocasión de crisis, de conflicto cognitivo que sirve para salir de ella habiendo adquirido nuevos conocimientos y destrezas: imprescindible la introducción de sistemas de numeración, primero aditivos y luego, como solución definitiva, posicionales, prestando mucha atención al cero y su función en estos sistemas, pues, como ocurrió en la historia, habrá dificultades para comprender su función. Primero de bases pequeñas luego de base decimal. A pesar de las ventajas para el cálculo de este sistema de numeración, aparecerán bloqueos: en la suma llevando, en la resta llevando, que podrán superarse gracias a material manipulativo como regletas, bloques multibase y ábacos abiertos. La secuenciación aconsejable es la de trabajar las decenas como agrupación de unidades en 1º y las centenas como grupos de 10 decenas y 100 unidades en 2º.

Esto implica proponer, en los primeros niveles, actividades en las que deba cuantificar y ordenar. En el contexto cardinal el niño debe agrupar, comparar, aparear, clasificar; manipulando objetos, contando con los dedos, etc., experiencias que le permitirán paulatinamente pasar a la simbolización, cada vez más esquemática.

Cuando hablo de niveles lo hago en el sentido Van Hiele, pero más concretamente en el sentido de niveles de competencia vistos al final de la primera parte de este texto. Niveles abordados de modos distintos por distintos autores. En la primera parte propuse un ejemplo de Rico y Lupianez en el que la competencia matemática se dividía en componentes y se



consideraban seis niveles para cada una de ellas, ahora voy a exponer la visión de los niveles de competencia numérica de Joaquín Giménez, que divide la competencia numérica, contenida en la componente de Lenguajes Simbólicos (LS) de Rico-Lupianez, en subcompetencias:

SUBCOMPETENCIA	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
C1: Comprende relaciona y da significado.	Cuenta, ordena, discrimina, reconoce secuencias, intervalos, etc. Numéricos en situaciones próximas.	Traduce informaciones simples y les da contenido numérico en contextos diferentes.	Se plantea posibilidades alternativas en contextos conocidos o usa los números o fracciones simples, pero no lo hace con relaciones o fracciones complejas.	Adapta conocimiento a otros contextos, de forma segura, interpretando situaciones y variaciones, usando números naturales o fracciones cuando es necesario.
C2: Representa.	Reconoce, percibe las representaciones propuestas asociadas a la situación de forma simplemente <<obediente>>. Usa manipulativos.	Identifica y usa adecuadamente representaciones numéricas, pasando de uno a otro sistema. Reconoce puntos de referencia, cambios de escala, etc.	Usa de forma flexible y adecuada representaciones diferentes, pero no estructuradas.	Organiza y sistematiza y estructura mediante representaciones adecuadas, las ideas matemáticas elaboradas.
C3: Argumenta y razona.	Usa argumentos basados en cuestiones informales o perceptivas.	Argumenta mediante descripciones sabiendo establecer contactos entre realidades.	Sabe esquematizar inducciones o argumentos basados en casos particulares.	Usa razonamientos inductivos o deductivos, casi propios, de lo informal, explicándola validez de las afirmaciones.
C4: Propone y resuelve problemas.	Resuelve mediante interpretaciones directas de los enunciados o manipulaciones.	Emplea estrategias asociadas a conteo, operaciones y/o desarrollos diversos.	Resuelve/propone situaciones en las que hay que elaborar informaciones intermedias, no inicialmente propuestas.	Asocia a tipos de problemas patrones numéricos, identifica estrategias nuevas no aprendidas.



SUBCOMPETENCIA	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
C5: Domina técnicas y recursos.	Responde a situaciones contextualizadas de una operación de forma correcta en contextos próximos.	Se muestra abierto/a al uso de técnicas operativas o algorítmicas exactas o estimativas.	Usa cálculos de tipos diferentes (pensado, mental, algorítmico, etc.) en contextos variados y de forma flexible y adecuada, y decodifica bien con símbolos.	Interpreta informaciones numéricas, usando valores aproximados o exactos y discute la adecuación a la situación.
C6: Modela.	Asume patrones y los aplica en situaciones semejantes usando analogías simples.	Usa modelos explícitos asociados a razonamientos (operativos o lógicos) distinguiendo los casos en que son aplicables.	Descubre patrones en múltiples situaciones, identificando más allá de analogías, pero basándose, sobre todo, en representaciones.	Reconoce principios de tipo metafórico que sirven para resolver situaciones de tipo investigativo abierto.
C7: Comunica.	Responde simplemente a demandas.	Describe procesos de resolución y descubrimiento.	Sabe adaptarse a explicaciones de otros y hacer aportes sobre lo numérico.	Usa con seguridad explicaciones matemáticas en diálogos, escritos, teatrales, etc. Como si fuera profesor.

Esta tabla ayuda a escapar a la algoritmización de los programas de Primaria, pues el aprendizaje de un algoritmo incluso si se ha alcanzado con éxito, no implica necesariamente pensamiento numérico, que no se adquiere de golpe, sino lentamente.

En el primer ciclo es apropiado comenzar el trabajo sobre **el pensamiento aditivo y multiplicativo**. El pensamiento aditivo se caracteriza por la capacidad de trabajar con conceptos, estrategias y representaciones que involucren a la suma y la resta. El pensamiento multiplicativo se caracteriza por la capacidad de trabajar con conceptos, estrategias y representaciones que involucren a la multiplicación y la división.

Muchos autores, proponen una secuencia lineal para las distintas fases del pensamiento numérico, en particular se considera que el pensamiento multiplicativo debe suceder al pensamiento aditivo, sin embargo, existen críticas a esta concepción. Algunos investigadores piensan que el pensamiento multiplicativo existe tempranamente en el niño/a, existen estudios que demuestran tal competencia antes de que se trabaje en la escuela. Como siempre, es fundamental estar alerta para descubrir los saberes no formales previos al trabajo



escolar, el currículo nulo, que siempre deberá suministrar las primeras experiencias desde donde arrancar la marcha hacia la progresión.

En cuanto a la comprensión de los algoritmos como tales, es imprescindible proporcionarles algoritmos alternativos y darles libertad para crear los propios, sólo así y con el trabajo antedicho sobre el pensamiento numérico, se preservará el concepto de la operación liberándola del corsé de la mecánica operatoria a la que está condenada en caso contrario.

En segundo ciclo se puede trabajar con los números racionales. En su expresión fraccionaria. Es necesario recordar cómo y por qué surge este campo de manera que podamos problematizar y secuenciar su enseñanza.

El alumno del Grado de Maestro/a de Primaria, habrá estudiado en la asignatura de Matemáticas que cada número racional puede ser representado por infinitas fracciones equivalentes, de este modo sabe que número racional y fracción no son sinónimos. Todas estas cuestiones deberá tenerlas claras antes de hacer la transposición didáctica, para evitar que se instalen en su alumnado errores viciosos, muy difíciles de corregir en niveles posteriores.

En primer ciclo se habrán trabajado ya series de recuento de 2 en 2, de 3 en 3, lo cual prepara la situación para trabajar con el doble, triple, mitad. En ese caso, en segundo ciclo se puede volver sobre ello y comenzar a trabajar con proporciones, razones, equivalencias, porcentajes, escalas, la fracción como relación parte-parte y relación parte-todo. También es el momento apropiado para analizar diversos sistemas de numeración, algunos utilizados didácticamente para introducir el decimal, como el binario o con bases pequeñas como 3, 4 y 5, lo cual da paso para estudiar otros más complejos por la magnitud de su base como el de base doce y el sexagesimal, presentes aún en la vida cotidiana, dado que ya manejan suficientes elementos como para realizar comparaciones y conversiones. Dicho contenido permite profundizar en la construcción del concepto de número.

En el tercer ciclo se trabaja explícitamente el concepto de razón, proporción, se pueden introducir algunos números irracionales π ó raíz cuadrada de dos, para asignar una identidad a los racionales por discriminación. Al trabajar las razones, es importante hacer visible el hecho de que ya conocen razones (una de las facetas de las fracciones).

No conviene menospreciar las dificultades que tienen los y las alumnas de este nivel para “dar sentido” a los números positivos y negativos y sus operaciones, así como las dificultades de manipulación de los signos + y – en las cadenas de cálculos.



2.1.2. Contenidos matemáticos, recursos didácticos y situaciones didácticas

2.1.2.1. Contenidos matemáticos

Contenidos matemáticos. Números

PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
<i>Naturales</i>	<i>Naturales y fraccionarios</i>	<i>Enteros, decimales y fracciones</i>
Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana.	Sistema de numeración decimal. Valor de posición de las cifras. Su uso en situaciones reales. Orden y relación entre los números. Notación.	Uso en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras.
Lectura y escritura de números. Grafía, nombre y valor de posición de números hasta tres cifras.	Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario apropiado.	Múltiplos y divisores.
Utilización de los números ordinales.	Comparación entre fracciones sencillas: mediante ordenación y representación gráfica	Números positivos y negativos. Utilización en contextos reales.
Orden y relaciones entre números. Comparación de números en contextos familiares.		Números fraccionarios. Obtención de fracciones equivalentes.
		Números decimales. Valor de posición y equivalencias. Uso de los números decimales en la vida cotidiana.
		Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica.
		Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.
		Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad.



Contenidos matemáticos. Operaciones

PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
<i>Naturales</i>	<i>Naturales y fraccionarios</i>	<i>Enteros, decimales y fracciones</i>
Disposición para utilizar los números, sus relaciones y operaciones para obtener y expresar información, para la interpretación de mensajes y para resolver problemas en situaciones reales.	Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar.	Jerarquía de las operaciones y usos del paréntesis.
	Interés para la utilización de los números y el cálculo numérico para resolver problemas en situaciones reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos.	

Contenidos matemáticos. Estrategias de cálculo

PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
<i>Naturales</i>	<i>Naturales y fraccionarios</i>	<i>Enteros, decimales y fracciones</i>
Cálculo de sumas y restas utilizando algoritmos estándar.	Descomposición aditiva y multiplicativa de los números. Construcción y memorización de las tablas de multiplicar.	Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas.
Construcción de las tablas de multiplicar del 2, 5 y 10 apoyándose en número de veces, suma repetida, disposición en cuadrículas.	Utilización de los algoritmos estándar, en contextos de resolución de problemas, de suma, resta, multiplicación y división por una cifra.	Utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores.
Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior, para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas.	Utilización de estrategias personales de cálculo mental.	Cálculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales.



<p>Cálculo aproximado. Estimación y redondeo del resultado de un cálculo hasta la decena más cercana escogiendo entre varias soluciones y valorando las respuestas razonables.</p>	<p>Estimación del resultado de una operación entre dos números, valorando si la respuesta es razonable.</p>	<p>Estimación del resultado de un cálculo y valoración de respuestas numéricas razonables.</p>
<p>Familiarización con el uso de la calculadora para la generación de series y composición y descomposición de números.</p>	<p>Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.</p>	<p>Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.</p>
<p>Resolución de problemas que impliquen la realización de cálculos, explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.</p>	<p>Confianza en las propias posibilidades y constancia para utilizar los números, sus relaciones y operaciones para obtener y expresar informaciones, manifestando iniciativa personal en los procesos de resolución de problemas de la vida cotidiana.</p>	<p>Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos.</p>
<p>Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la búsqueda de soluciones.</p>	<p>Interés por la presentación limpia, ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.</p>	<p>Capacidad para formular razonamientos y para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores.</p>
<p>Gusto por la presentación ordenada y limpia de los cálculos y sus resultados.</p>	<p>Disposición para desarrollar aprendizajes autónomos en relación con los números, sus relaciones y operaciones.</p>	<p>Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo, manifestando iniciativa para resolver problemas que implican la aplicación de los contenidos estudiados.</p>

2.1.2.2. Materiales

El carácter prioritariamente perceptivo del aprendizaje en los primeros niveles, hace que los materiales cobren la máxima importancia en ellos: ábacos, **regletas de Cuisenaire**, bloques multibase, dedos de las manos, constelaciones de signos o figuras, elementos todos ellos que facilitan la comparación, la cuantificación y la ordenación.



Regletas de Cusenaire. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Las **canções**, en las que se recitan los números, son típicas de cada cultura y óptimas para comenzar a recitar los números desde el currículo nulo. También los juegos tradicionales, como el escondite, jugar a la comba o a la rayuela, el dominó, el cinquillo, juego de cartas sencillo y eficaz en el aprendizaje de los ordinales. El parchís es un juego de conteo ideal para recitar la serie numérica del 1 al 20.



Canciones de números. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Las funciones de contar y calcular, requieren actividades y estrategias que guíen el descubrimiento de regularidades, que ayuden a “descubrir” leyes del sistema numérico, que **promuevan el cálculo**.



Pulse [aquí](#) para ver la web.

En niveles posteriores, un recurso útil es introducir “trampas didácticas”, distractores, que sorprenden a los estudiantes cuando descubren el gazapo oculto y aportan una carga de diversión y un fuerte componente emocional que refuerza el registro en la memoria.

Otros materiales que pueden engrosar el bagaje de recursos son las regletas retroyectables, regletas virtuales, cartas de iniciación numérica, dominó de equivalencias, dominós de operaciones, dominó de equivalencias de fracciones, calculadoras básicas, recursos multimedia que traen al aula virtualmente recursos manipulables: en el siguiente vídeo se observa el modo de trabajar el recuento con **ábacos**.



Ábacos. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

2.1.2.3. Situaciones didácticas

PRIMER CICLO

Antes de trabajar en situaciones como la siguiente, se habrá trabajado en situaciones con números más sencillos en los que no habrá sido necesario el recuento, no se habrá abordado la simbolización y se habrá trabajado oralmente los nombres de los números.

Las situaciones de recitado de la sucesión numérica, ya hemos indicado que funcionan bien en un contexto de juegos, poemas y canciones.



Situaciones de recuento: obtención de cardinales:

En el siguiente enlace se presenta una animación TIC que trabaja interactivamente situaciones de cardinalidad sin recuento (para números pequeños), con recuento (números más grandes) e incluso situaciones de sumas sencillas por recuento, incluye la representación simbólica de los números hasta dos cifras y de la suma.



Los globos del cumpleaños. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Situaciones de orden numérico:

El siguiente vídeo ilustra la eficacia de las actividades de juego en las que el niño/a está involucrada y en las que el concepto matemático, en este caso los números ordinales, forma parte esencial del juego:



Los ordinales. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Operaciones concretas presentadas por animaciones en Internet:

Previo a la presentación de los algoritmos estándar, es necesario el trabajo con los sistemas de numeración posicionales. Las manos proporcionan un material idóneo para el trabajo en base 10 o en las bases 5 o 12. La investigación de restos de estos sistemas en el entorno y la de sus orígenes, permiten introducir elementos cotidianos como las docenas de huevos o el minuterero de un reloj analógico dando sentido histórico al lenguaje.

El aprendizaje de las tablas de multiplicar, necesario como paso previo al algoritmo estándar, dispone de trucos como el de la tabla del 9.

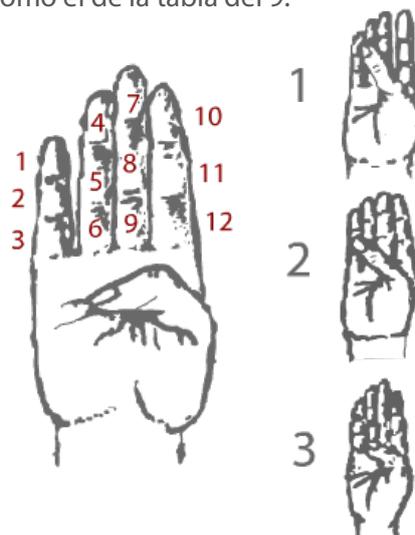


Ilustración 6. El minuterero de un reloj analógico dando sentido histórico al lenguaje. Pulse [aquí](#) para ver la fuente.



Ilustración 7. $7 \times 9 = 63$. Adaptado de Thompson, D W. 1992. *On Growth and Form*. Ed. Dover.

Bajamos el 7, contamos 6 dedos a su izquierda y 3 a su derecha, total: 63 o el que más abajo se verá para multiplicar por 6, 7, 8 o 9.

Las animaciones que encontraremos en los siguientes enlaces tienden a facilitar el aprendizaje de los algoritmos estándar, pero, ya lo he dicho en otro lugar, ese aprendizaje, por sí mismo no tiene por qué producir pensamiento matemático. Sin embargo, si situamos al aprendiz en el contexto imaginario de la investigación que lo produjo (investigación o construcción social que ha llevado varios siglos y distintos resultados en cada cultura), con el apoyo de materiales y organización de medios didácticos bien diseñados, puede atravesar las etapas de **manipulación, esquema transaccional y algoritmo estándar**, con la consiguiente asimilación comprensiva del algoritmo, como consecuencia de la necesidad de resolución de un cálculo que era sencillo de comprender en origen y gracias a esta secuenciación de actividades, se habrá salvado de la opacación que el mecanicismo escolar le suele imponer.

Ejemplos de actividades de manipulación, propios del primer ciclo:

Situaciones de suma con regletas. Pulse [aquí](#) para ver la web.



Sumar con los dedos. Pulse [aquí](#) para ver la web.

La tabla de sumar y la conmutatividad de la suma. Pulse [aquí](#) para ver la web.



En la Edad Media, aquellos afortunados que tenían acceso a la cultura, no tenían por costumbre memorizar las tablas de multiplicar del 2 al 9, como se hace hoy, bastaba que memorizaran los sencillos casos del 2 al 4, que se memorizan de modo natural tras el trabajo de conteo de 2 en 2, de 3 en 3, y de 4 en 4 y, adicionalmente recordar que 25 es 5x5. El resto se obtenía con el truco que ilustra la imagen siguiente.-

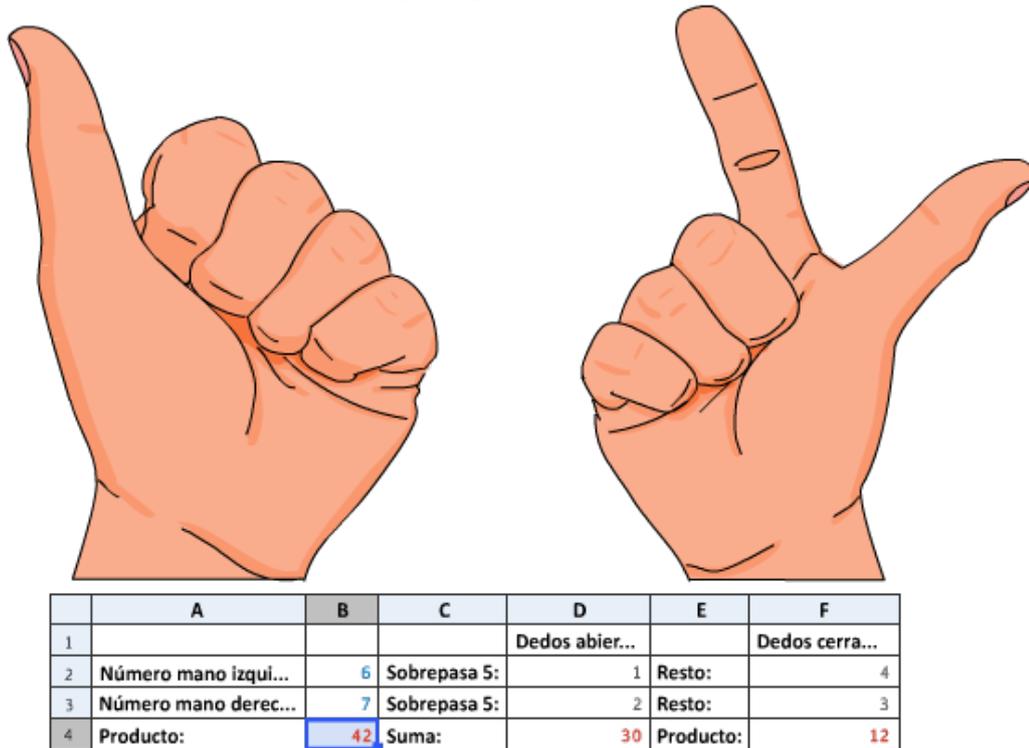


Ilustración 8. Multiplicar con los dedos. Pulse [aquí](#) para ver la fuente.

Hoy puede utilizarse como ayuda en caso de duda, como recurso para el cálculo mental rápido, puesto que es generalizable, o como propuesta de investigación: ¿Por qué funciona? ¿Funcionaría con otros números?



Situaciones multiplicativas con bolas. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Operaciones variadas. Pulse [aquí](#) para ver la web.

SEGUNDO CICLO

En el segundo ciclo los algoritmos son automatizados para cualquier número y se introducen las fracciones. Es el momento de presentar la necesidad del algoritmo estándar y de trabajar



con otros algoritmos que permitan descubrir su esencia de puro mecanismo eficaz para cálculos con números grandes. También es el momento de reflexionar sobre los errores que persisten desde el primer ciclo, debidos a bloqueos en el uso del algoritmo estándar, como la suma superior a 9 en un orden determinado o la resta de una cifra mayor en el sustraendo a una cifra menor en el minuendo, son los bloqueos típicos de la **suma y la resta llevando**. También es el momento de comprender el algoritmo estándar como herramienta de superación de otros algoritmos, limitados por la magnitud de los términos de la multiplicación y también es el momento de comprender que dividir es algo más, mucho más que un algoritmo. Estas comprensiones facilitarán el **cálculo mental, que queda siempre bloqueado ante el intento de operar mentalmente mediante los algoritmos estándar**.

Suma llevando

El **ábaco abierto** es un material manipulativo que permite comprender el funcionamiento del algoritmo estándar y a superar el bloqueo del caso de la suma llevando, que puede abordarse en 1º de Primaria si el conflicto afecta a las unidades, en segundo si afecta a las decenas y en tercero si afecta a los restantes órdenes. Tras la manipulación con el ábaco se pueden utilizar prealgoritmos de sumas parciales. Todos estos recursos expuestos secuencialmente, deben estar disponibles en cualquier momento para atender la diversidad de ritmos de aprendizaje que coexisten en una misma aula. También son eficaces, en esa fase las **regletas de Cuisenaire**.



El ábaco abierto. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Las Reglas de Cuisenaire. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Resta llevando

El algoritmo estándar de la resta, cuando el minuendo tiene todas sus cifras mayores que las de la misma columna del sustraendo se asimila fácilmente. El bloqueo cognitivo se plantea, como hemos visto, en el caso de que alguna cifra del minuendo sea menor que la correspondiente del sustraendo, estamos en el caso de las llamadas restas llevando. Los siguientes vídeos nos muestran el trabajo que una maestra realiza con el material concreto, en particular con las **regletas** o con el **ábaco**. Por supuesto, estos materiales comerciales se pueden sustituir por materiales cotidianos, en el caso de no disponer de los otros, situación



que puede darse por razones diversas, no necesariamente relacionadas con la escasez económica, que también, sino porque la maestra o el maestro deben ser ágiles para crear los materiales en el momento que los necesitan. Lo que importa es la estructura del material y su función didáctica, no el tipo de material físico con el que se construye. El papel puede resolver la mayor parte de estas situaciones de escasez. Semillas, palitos, hojas, frutas, etc también son **materiales en bruto**, susceptibles de ser transformados en material didáctico concreto, manipulable.

Regletas. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.



Ábaco. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Materiales en bruto. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Para comprender el algoritmo estándar de la multiplicación son de gran ayuda algoritmos procedentes de **otras culturas**, como la maya o la hindú, en el que la construcción gráfica del producto resulta tan evidente que sólo al aumentar la magnitud de los factores, nos veremos impelidos a utilizar el algoritmo estándar, que, por otra parte, quedará mucho mejor comprendido, siempre con un paso intermedio por el prealgoritmo. Comprender la diferencia entre la operación y el algoritmo, es más fácil si se dispone de diversos algoritmos, como los que permiten aprender la tabla del 9 con los dedos de las manos o multiplicar con ellos, tan divertidos y eficaces como misteriosos a ojos del niño/a de primaria.



Otras culturas. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Dividir es algo más que calcular, en ella se manifiestan las cuatro operaciones aritméticas básicas y su análisis proporciona valiosos recursos de cálculo mental. Los **bloques multibase** ayudan a comprender el concepto de la división como reparto distributivo. La función de agrupamiento o reparto sustractivo, genera la necesidad de recurrir a la multiplicación como ayuda para evitar reiteraciones tediosas, que, por otra parte, son las más adecuadas para realizar sencillos diagramas de flujo recursivos, así como pequeños programas en lenguaje LOGO, muy adecuados para atender la diversidad que implica la presencia de alumnos/as con altas capacidades. El prealgoritmo con la sustracción representada explícitamente, es



interesante, porque ayuda a comprender el algoritmo estándar y porque deja un sustrato al que se recurrirá en niveles posteriores en las divisiones polinómicas.



Bloques multibase. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Para introducir las fracciones, como siempre, recurriremos al currículo nulo de las personas del aula, no perdamos de vista las fracciones que aparecen en el lenguaje coloquial y en la vida cotidiana. En un segundo momento trabajaremos las fracciones y números racionales positivos manipulando materiales tangibles e interactuando con animaciones virtuales:



Introducción a las fracciones. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Fracciones, números racionales, operaciones y representaciones. Pulse [aquí](#) para ver la web.

TERCER CICLO

Fracciones y decimales



Conexión entre fracciones y decimales. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Operaciones aritméticas con decimales

Situación de descubrimiento de la calculadora como recurso para el aprendizaje del cálculo con números decimales, según [Vicent Calixte Juan en SUMA nº 2](#).

Situaciones introductorias de los números enteros



El calendario una construcción social de la medida del tiempo. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Un cuento introductorio. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Para todo el bloque encontraremos animaciones en línea si pulsamos sobre el ítem Aritmética de [este enlace](#).

Una exposición sobre números, que rebasa los niveles de Primaria, pero que conviene a los y las estudiantes del Grado de Maestro/a de Primaria, pues sólo una comprensión más completa les permitirá hacer la transferencia correcta con suficiente perspectiva:



Un paseo por el infinito. Pulse [aquí](#) para ver la web.



TEMA 3. DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA PLANA Y ESPACIAL

Geometría. Contenidos mínimos en Primaria:

- El conocimiento geométrico.
- Construcción del espacio en el niño (6-12).
- Objetos del mundo real y objetos geométricos.
- Los objetos geométricos en el plano y en el espacio.
- Las clasificaciones.
- Estudio de las transformaciones geométricas en educación primaria.

FORMAS Y FIGURAS GEOMÉTRICAS. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. ORIENTACIÓN ESPACIAL Y SISTEMAS DE REFERENCIA

3.1 Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje

En cuanto a la progresión en el aprendizaje de la Geometría, dado que el modelo de Van Hiele ha tenido gran aceptación como herramienta para secuenciar los contenidos en multitud de diseños curriculares, he optado por seguir tal modelo en algunos temas, en especial en el de Geometría, dado que dicho modelo surgió, en un principio, como investigación del proceso de aprendizaje precisamente en Geometría.

3.1.1. El modelo de los niveles de Van Hiele

Consta de tres componentes: los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y la comprensión intuitiva, el insight, la gestalt, que surge como un aspecto del proceso de descubrimiento.

Añade, a modelos como el de Piaget, que no se queda en la taxonomía de los niveles, introduce las fases por las que hay que conducir al alumno para que pueda acelerar su progreso de un nivel a otro y además considera que dichos niveles no están tan ligados a la edad como a la cantidad de experiencias habidas en relación a los objetos de estudio de un nivel, cuantas más experiencias se tengan más posibilidades hay de saltar pronto al siguiente



nivel. Es responsabilidad de maestro o la maestra proporcionar al alumnado las suficientes y adecuadas situaciones didácticas en que se puedan desarrollar esas experiencias. Adecuadas en el sentido de que cada nivel de razonamiento posee su propio lenguaje, por lo que el proceso de tránsito de un nivel a otro, es decir las fases de aprendizaje deberán tener muy en cuenta este hecho, para que se produzca la comprensión y el paso significativo, no un paso en falso disfrazado con retahílas memorizadas y no comprendidas. El aprendizaje por proyectos tiene la virtud de que el contexto es elegido por el alumnado y el lenguaje utilizado el propio de su nivel de razonamiento, el aprendizaje se produce a través de las crisis y es en ellas donde la ayuda del maestro o la maestra puede resultar decisiva con la ayuda de las fases de aprendizaje del modelo Van Hiele.

3.1.1.1. Los niveles

- **Reconocimiento:** de objetos en el microespacio, movimientos en el microespacio, marco referencial. Localización de objetos en el microespacio. Este nivel, siempre teniendo en cuenta que lo que cuenta es más la experiencia que la edad.
- **Análisis,** Del espacio al plano, propiedades de los objetos. Formas y figuras. En el Segundo Ciclo de Primaria ya podemos contar con que habrá habido la suficiente experiencia para que el alumnado se halle en este nivel.
- **Relaciones,** entre propiedades, movimientos en el plano, congruencia, simetría, semejanza, sistema de referencia. Será entre el Tercer Ciclo de Primaria y Secundaria, contando con la holgura que el modelo exige, cuando se podrá acompañar al alumnado en las experiencias de este nivel, hasta que puedan ser abordadas las fases de aprendizaje que le conducirán ya a la Enseñanza Media, donde se podrán ya desarrollar las tareas propias del nivel siguiente:
- **Deducción** Como se ha dicho, este nivel se correspondería con la Enseñanza Media y los alumnos del Grado de Maestro/a de Primaria que estáis utilizando estos materiales, se supone que lo tenéis superado, incluso que habéis atravesado las fases de aprendizaje que os han transportado hasta dónde estáis ahora, el nivel siguiente:



- **Axiomatización.** Este nivel es propio de la Enseñanza Universitaria. Sería bueno que cada alumno y alumna de este curso hiciera una reflexión sobre el nivel en el que cree que se encuentra realmente, si los ha experimentado todos de modo significativo y ha realizado las transiciones sin falsear la comprensión necesaria. En caso de encontrar fallas, es el momento de trabajar duro para restañarlas. El descubrimiento del nivel en el que estáis realmente tendrá dos resultados beneficiosos, según Ausubel, sólo necesitáis saber eso para construir vuestro conocimiento desde ese punto, por otra parte, esta experiencia personal os hará comprender lo necesario que es en el ejercicio de vuestra futura profesión, **conocer en qué nivel está cada alumno o alumna**, observar su lenguaje, hablarle a ese nivel, para no perderle y conducirlo por un camino falso.

3.1.1.2. Las fases

Los y las estudiantes se hallan en un determinado nivel de aprendizaje y procede comenzar la tarea de paso al nivel siguiente que, según el modelo Van Hiele, se produce en cinco fases:

- **Información**

En esta fase se trabaja un poco al estilo Lakatos, construyendo y deconstruyendo las formulaciones que van surgiendo en el aula para acotar un concepto o un procedimiento, en el seno de un diálogo que involucra a alumnado y maestra o maestro y que por tanto va desde las concepciones previas a la construcción social (grupal) del nuevo conocimiento.
- **Orientación dirigida**

En esta fase el maestro o la maestra deberán haber diseñado actividades sencillas, con respuesta corta, con apoyo de material manipulable concreto, por ejemplo un geoplano, para que afloren las estructuras del nivel de destino.
- **Explicitación**

El sistema de relaciones propias del nivel de destino empieza a ser obvio.



➤ **Orientación libre**

Los alumnos y alumnas "Adquieren experiencia al buscar su propio camino o resolviendo la tarea. Al orientarse a sí mismos en el campo de investigación, se hacen explícitas muchas relaciones entre los objetos de estudio"

➤ **Integración**

Los estudiantes revisan y resumen lo que han aprendido con el objeto de formarse una visión panorámica de la nueva red de objetos y relaciones. El profesor puede ayudar en esta síntesis "dando un análisis global" (van Hiele 1984a, p. 247) sobre lo que los estudiantes han aprendido. Sin embargo, es importante, que este resumen no presente nada nuevo.

Ahora ya están en otro nivel de aprendizaje.

3.1.2. El modelo evolutivo de Piaget

El modelo de Piaget está más centrado en la propia estructura psicológica del alumno y su evolución en un sentido biológico. Puesto que sigue siendo el referente fundamental en las opciones que centran la enseñanza en el momento evolutivo del alumno, adjunto el siguiente cuadro para completar la fundamentación teórica de las recomendaciones que expondré a continuación respecto a los recursos a utilizar y los tipos de situaciones didácticas adecuados, que partiendo del trabajo de los contenidos, tiendan a aumentar las capacidades que llevarán al alumnado a la consecución de los objetivos que serán objeto de evaluación, en orden a su nivel de contribución a la meta final, alcanzar la competencia matemática deseable al final de la etapa.



DESARROLLO COGNITIVO	NIVELES DE ORGANIZACIÓN ESPACIAL	RELACIONES ESPACIALES QUE PUEDEN SER CONSTRUIDAS	
Periodo SENSORIOMOTOR (0-2) años	El espacio observable, en el que vive, responde a necesidades sensoriales.	Espacio topológico. Espacio proyectivo. Espacio Euclidiano o métrico.	La imagen funciona como un objeto permanente
Periodo PREOPERACIONAL (2-7) años	Se amplía el espacio, se conocen más lugares y podemos modificar figuras		La imagen ya puede ser representada, pero sin conexión métrica con la realidad. Se quiere modificar
Periodo OPERACIONES CONCRETAS (7-11) años	El espacio es medible, cuantificable y diferente, según el lugar desde donde se observe		Sistema de referencia euclidiano, la imagen se representa más real. Se observan proporciones
Periodo OPERACIONES FORMALES (11-15) años	Capacidad para abstraer el espacio en una geometría más analítica.		Coordinación del espacio de referencia y el espacio métrico.

Tabla. Alcalde, M, Esteban, I, Lorenzo, G, 2011, p.38.

Aunque Piaget habla de niveles evolutivos que no vincula a las edades, puesto que muchas personas de avanzada edad no superan los primeros niveles, los autores posteriores han aportado investigaciones que, a modo indicativo, establecen relaciones entre niveles y edades, en sentido amplio y tomando en consideración la objeción anterior, lo cual ayuda a secuenciar la tarea de la enseñanza. Como, además, se puede suponer que la mencionada objeción está más relacionada con la falta de experiencias previas que con una carencia innata, considero que la afirmación del papel preponderante de la experiencia en el modelo Van Hiele, no interfiere con el modelo propuesto por Alcalde et al. Así, nos aseguramos de que "llegada la edad" la carencia no será debida a falta de experiencias suficientes.



3.2 Contenidos, recursos y, situaciones

3.2.1. Contenidos matemáticos

	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
La situación en el espacio, distancias, ángulos y giros	Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia.	Representación elemental de espacios conocidos: planos y maquetas.	Ángulos en distintas posiciones. Sistema de coordenadas cartesianas.
	Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios: líneas abiertas y cerradas; rectas y curvas.	Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico.	Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros...
	Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios y elaboración de los mismos.	Las líneas como recorrido: rectas y curvas, intersección de rectas y rectas paralelas	La representación elemental del espacio, escalas y graficas sencillas. Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.
Formas planas y espaciales	Las figuras y sus elementos. Identificación de figuras planas en objetos y espacios cotidianos.	Identificación de figuras planas y espaciales en la vida cotidiana. Clasificación de polígonos. Lados y vértices.	Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo.
	Identificación de los cuerpos geométricos en objetos familiares. Descripción de su forma, utilizando el vocabulario geométrico básico.	La circunferencia y el círculo. Los cuerpos geométricos: cubos, esferas, prismas, pirámides y cilindros.	Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
	Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos con criterios elementales.	Aristas y caras. Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico.	Interés por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.



	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
	Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.	<p>Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos y de cuerpos geométricos a partir de un desarrollo.</p> <p>Exploración de formas geométricas elementales.</p>	
		<p>Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.</p> <p>Comparación y clasificación de ángulos.</p>	
Regularidades y simetrías	<p>Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos.</p> <p>Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales.</p>	<p>Transformaciones métricas: traslaciones y simetrías.</p> <p>Interés por la elaboración y por la presentación cuidadosa de las construcciones geométricas</p>	<p>Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos.</p> <p>Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.</p>
	Resolución de problemas geométricos explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	Gusto por compartir los procesos de resolución y los resultados obtenidos.	Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
	Interés y curiosidad por la identificación de las formas y sus elementos característicos.	Colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo.	Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio.
	Confianza en las propias posibilidades; curiosidad, interés y constancia en la búsqueda de soluciones.	Confianza en las propias posibilidades y constancia para utilizar las construcciones geométricas y los objetos y las relaciones espaciales.	Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas y los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales
			Interés por la presentación clara y ordenada de los trabajos geométricos.



3.2.2. Materiales

En este bloque es donde el alumno aprenderá sobre formas y estructuras geométricas. La geometría es describir, analizar propiedades, clasificar y razonar, y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra, estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales:

Bloques lógicos, Formas geométricas Retroproyectables, Policubos, Mecano, Tangram, Tangram retroproyectable, tramas de puntos, libros de espejos, Cubo soma, Mira, Libro de espejos, Láminas de conexiones, Láminas de simetría, Pentaminós. Bolsa de cubos de pórex, Pentacubos, Geoplanos ortométrico e isométrico. Geoplanos ortométrico y circular, Juego de poliedros transparentes, Juego de varillas para poliedros, CD Poliedros regulares, CD Modelos geométricos, Polígonos encajables con desarrollos, Transparencias unidades de medida, Guía Didáctica de geometría, Papeles DIN A0, DIN A1, DIN A2, DIN A3, DIN A4, Rollo cinta adhesiva, rolo serpentina, clips, Espiral de libreta, tornillos, muelles, pinza de tender, lápices hexagonales, sacapuntas, Tubo pritt y sacacorchos, Abanico, Metro articulado, Tampón y almohadilla, Libro de espejos, Lata refresco, Vasos cilíndricos y vasos conoidales de plástico, Copas cilíndricas, Cuentagotas y cucharillas, Vasija con marcas de cocina, Globos para hinchar, Tetrapack de leche, Cajas de cereales, Papel milimetrado fino, Cajas para montar, Rollo de números, Fichas Productos, Etiquetas, Símbolos, Dtos (A5, 32 unid), Simulador de códigos de barras, Calendario de clase, Reloj de Pared, Esferas de fórex (Bolsa), Objetos cotidianos, Materiales domésticos para investigar: **Palillos** poliedros vacuos; Frutas: se puede descargar un documento pdf en [en](#); Palillos y gominolas. (Ver el proyecto en el vídeo de la presentación de



Ilustración 11. Materiales: palillos.



la asignatura); ...y jabón (id); ...y espejos (id mas vídeo del plano al espacio)

Pero no sólo los materiales son necesarios, también, y sobre todo, lo es la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc. para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica.

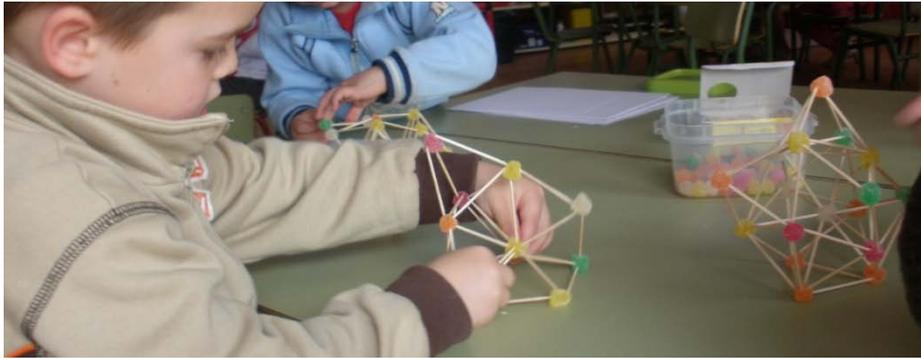


Ilustración 12. Materiales: palillos.



Palillos. Pulse [aquí](#) para ver la web.

3.2.3. Situaciones didácticas

Las situaciones didácticas se diseñan con el foco puesto en las capacidades que deseamos activar y desarrollar para alcanzar el objetivo del bloque, en orden a facilitar el desarrollo de la competencia matemática en particular y el resto de competencias básicas en general.

De los 8 objetivos generales de la etapa, en este bloque trabajaremos básicamente el 7º:

Ser capaz de identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.

Este objetivo general, puede ser desglosado en objetivos específicos del bloque, expresados en términos de capacidades, como siempre.

El conocimiento geométrico no se limita a reconocer visualmente unas formas geométricas y saber nombrarlas. La exploración consciente del espacio, la comparación y el establecimiento de relaciones entre figuras y formas geométricas, el descubrimiento de relaciones entre ellas, las transformaciones, congruencias, simetrías y semejanzas, la construcción de modelos, son esenciales para interiorizar el conocimiento, elaborar conclusiones, llegar a formular leyes



generales y resolver problemas. Es por ello que el objetivo general nº 7 de la etapa, que afecta al bloque de geometría, vamos a desglosarlo en tres objetivos específicos que facilitarán la tarea de focalizar las actividades en las capacidades a desarrollar.

- O1: Capacidad de visualización espacial: ser capaz de ver, reconocer, identificar formas y figuras geométricas del entorno.
- O2: Capacidad de representación espacial: ser capaz de construir, reconstruir, formas y de dibujar figuras.
- O3: Capacidad de imaginación espacial: ser capaz de reconocer propiedades y relaciones geométricas en objetos y espacios imaginarios. Interpretar planos y mapas y realizarlos en casos sencillos.

Teniendo en cuenta que el modelo curricular defendido por la LOE es el del currículo en espiral, los niveles adquiridos de estas capacidades se irán alcanzando gradualmente en los ciclos de Primaria, con más carga del primer objetivo en el primer ciclo, del segundo en el segundo ciclo y del tercero en el tercer ciclo.

A continuación propongo algunas situaciones didácticas como ejemplo, indicando el ciclo al que se adscriben preferentemente.

3.2.3.1. Juego de psicomotricidad

Nivel recomendado: Primer ciclo de Primaria.

Objetivos: ser capaces de orientarse en el espacio, reconocer distintos tipos de regiones: abiertas y cerradas y de líneas: rectas, curvas. (O1).

Materiales:

- Pizarra y tiza.
- Cuerdas de colores.

Desarrollo de la actividad:

- Nos movemos libremente por el espacio, al ritmo de una música.
- Nos movemos en grupos.
- Nos movemos en grupos de acuerdo con las líneas que se dibujan en la pizarra. (dos rectas que se cortan, dos rectas paralelas, dos curvas paralelas, dos curvas que se cortan, dos circunferencias secantes y dos circunferencias concéntricas.
- Se reparte una cuerda a cada niño o niña.



- Jugamos individualmente con las cuerdas, con el movimiento de las cuerdas
- Jugamos en grupos. Primero procuramos que no choquen las cuerdas. Luego procuramos que choquen.
- Formamos con las cuerdas una línea cerrada en el suelo, delimitando un territorio. Nos metemos dentro.
- Formamos con otras cuerdas, o pintando con tiza en el suelo, líneas entre territorios, que serán caminos. Ponemos un camino entre cada dos territorios.
- Ponemos un aro en cada cruce de caminos. Cuando suene la música nos moveremos dentro de nuestro territorio o, si nos apetece, vamos por algún camino hasta otro territorio a bailar en él, con el grupo que allí está, si nos dejan. Cuando pasemos por un cruce daremos una palmada.



Palillos. Pulse [aquí](#) para ver la web.

3.2.3.2. Cuento de papiroflexia

Nivel recomendado: Final del Primer ciclo, Segundo y Tercer ciclo de Primaria.

Objetivos: Visualizar formas tridimensionales en el espacio y reconocer plegados, abatimientos, simetrías especulares, simetrías axiales, giros en el espacio, Realizar las transformaciones geométricas inversas, reconocer las partes del origami implicadas en cada transformación.

Materiales:

- Hojas de papel tamaño DinA3.
- Vídeo de Alicia.

Desarrollo de la actividad:

- Visionado del vídeo.
- Construcción, paso a paso, de los personajes.
- Construcción del pájaro y el barco con la vela desplegada.
- Coloreamos el exterior de las dos figuras.
- Calculamos sin desplegar las figuras la proporción de parte coloreada respecto al cuadrado inicial.
- Desplegamos la gorra y contamos los cuadraditos que tienen los lados sobre los pliegues.



3.2.3.3. Construcciones con palillos y gominolas.

Nivel recomendado: Tercer Ciclo de Primaria.

Objetivos: Construir poliedros. Debatir sobre qué es un poliedro. Clasificar poliedros. Relacionar números de aristas, vértices y caras de los poliedros. Definir poliedro. Visualizar planos de simetría en los poliedros regulares.

Materiales:

- Palillos de mesa.
- Gominolas esféricas.
- Disolución jabonosa.
- Papel.
- Papel de espejo.
- Linterna.

Desarrollo de la actividad: **Vídeo docente.**

En las actividades expuestas en este vídeo, realizadas con materiales domésticos como palillos, gominolas, jabón o papel, se desarrolla la geometría visual, propia de Primaria, dando paseos por los cuatro tipos de situaciones básicas definidas por Claudi Alsina et al. en la página 35 de *Materiales para construir la Geometría: Geometría de las formas* naturales o artificiales.

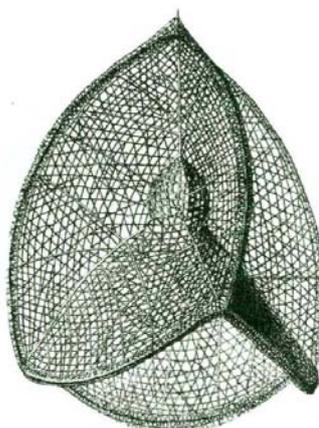


Ilustración 9. *Callimitra agnesae*. Fuente: pulse [aquí](#) para ver la web.



Geometría de los reflejos con la construcción de caleidoscopios poliédricos,

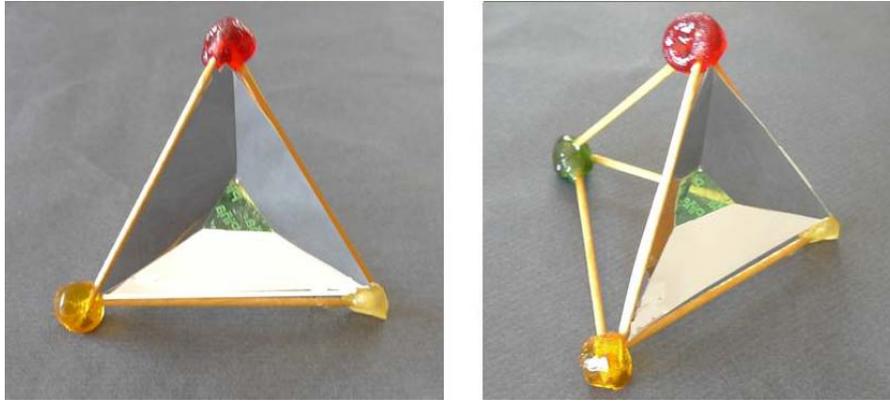


Ilustración 10. Caleidoscopio tetraédrico. Creación propia (Xaro Nomdedeu Moreno) para la Conferencia de Clausura del curso 20010-2011 de ESTALMAT C.V.

Geometría de las sombras con la deducción de las convenciones para representar en el encerado o en la libreta los poliedros, como sombras de sí mismos.

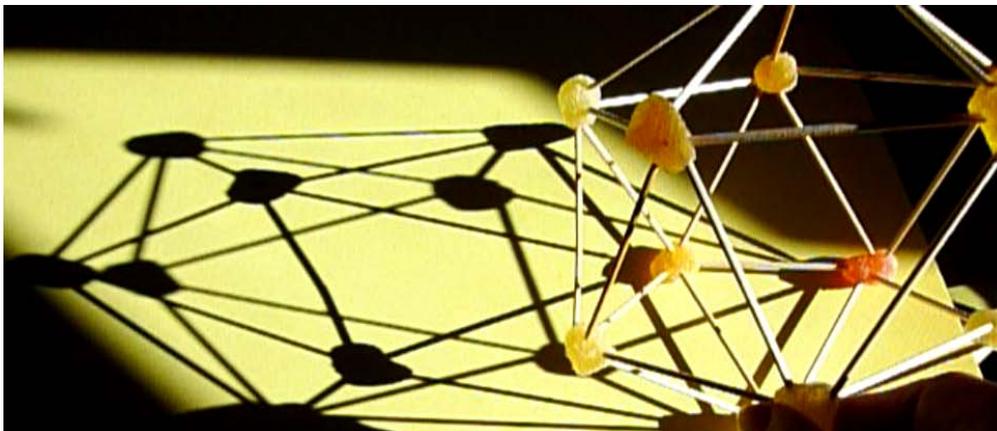


Ilustración 11. Sombra que explica la convención con que representamos el icosaedro en el plano. Creación propia (Xaro Nomdedeu Moreno) para la Conferencia de Clausura del curso 20010-2011 de ESTALMAT C.V.

y **geometría efímera**, la más sencilla las pompas de jabón:

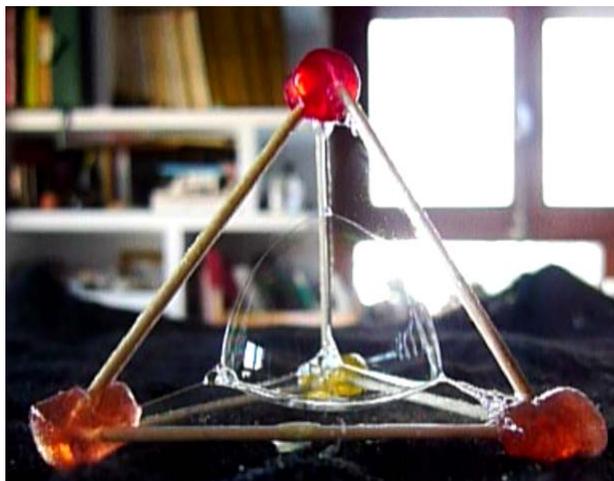


Ilustración 12. Pompa inserta en la intersección de los planos jabonosos de simetría del tetraedro que reproduce el esqueleto de la Callimitra agnesae. Creación propia (Xaro Nomdedeu Moreno) para la Conferencia de Clausura del curso 2010-2011 de ESTALMAT C.V.

Para todo el bloque encontraremos animaciones en línea si pulsamos sobre el ítem Geometría de [este enlace](#).

Una actividad riquísima en la geometría de Primaria, que permite un desarrollo alejado de los rígidos principios de la geometría euclídea y nos acerca a una visión más moderna y amplia de la geometría, propuesta por Klein en el programa de Erlangen es la de las rosetas, frisos y mosaicos, que se pueden trabajar a partir de multitud de páginas en internet, en particular la página mencionada en el apartado de materiales de la primera parte, elaborada por José Antonio Mora.

TEMA 4. DIDÁCTICA DE LA PROPORCIONALIDAD Y MEDIDA

Medida y proporción. Contenidos mínimos en Primaria.

- El conocimiento de las magnitudes y su medida.
- Construcción de la idea de magnitud en el niño (6-12 años).
- Unidades e instrumentos de medida.
- Estudios particulares de las magnitudes básicas y su medida.
- Proporcionalidad entre magnitudes.



MAGNITUDES Y MEDIDA

Realmente, este tema es el origen de la geometría, etimológicamente medida de la tierra, que, en un principio no significó medir el Planeta Tierra, sino las tierras del planeta, como hicieron los egipcios anualmente, antes y después de las inundaciones del Nilo, como actividad económico administrativa del imperio, para mantener un registro de los lindes de las propiedades de los ricos terrenos cultivables, a ambas márgenes del Nilo. Los griegos, grandes filósofos y especuladores teóricos, le dieron el significado que hoy conocemos y se emplearon en las medidas indirectas de tamaños y distancias del Sol la Luna y la Tierra. De modo que esta acepción desplazó a la original que ha quedado en el apartado de medida de magnitudes, a medio camino entre la geometría y la aritmética, puesto que se miden objetos modelizados geoméricamente, y sus medidas se expresan, como comparación de magnitudes, mediante números, objetos propios de la Aritmética.

Normalmente hoy se asocia magnitudes y medida al sistema métrico decimal, sistema jovencísimo, nacido de la Revolución Francesa e implantado en España mediado el siglo XIX. Se consideran cumplidos los objetivos de este bloque cuando el alumno es capaz de efectuar conversiones con seguridad y rapidez. Pero para los profesores y alumnos, suele convertirse en un problema, consecuencia del método tradicional de enseñanza por transmisión, que consiste en escuchar y repetir, un grave error, ya que, como he dicho reiteradamente, para comprender las propiedades de los objetos hay que manipularlos. El método tradicional produce sólo la memorización de reglas no comprendidas, que al carecer de sentido para el educando, las olvida una vez cumplida su función inmediata: aprobar el examen.

Es necesaria la manipulación y una reflexión posterior sobre las equivalencias de las medidas en distintas unidades, unidades que en cada situación histórica han tenido su razón de ser, más o menos justa, pero sí justificada. De lo contrario aparecerán como surgidas por azar. Todo esto es necesario antes de abordar las conversiones como técnicas, de lo contrario serán enseñadas dogmáticamente y aprendidas memorísticamente sin comprensión previa. Como siempre, el enfoque constructivo enculturizador recomienda partir del currículo nulo, utilizar medidas antropomorfas como el dedo, la mano, el palmo, el pie, el paso, el brazo, etc para pasar a las tradicionales del lugar, basadas en las anteriores, pero fijadas ya en patrones que difieren de unos lugares a otros. Sólo así se entenderá la necesidad de un sistema universal cuando el comercio se universaliza.



Para que el niño/a se vea impelido a buscar estrategias para medir, hay que valorar y estimular la capacidad sensorial, proporcionarle situaciones en las que sus sentidos entren en acción y su ingenio descubra los instrumentos adecuados.

En los programas de matemáticas siempre está presente la medida, quizás porque nuestra vida cotidiana está llena de actividades relacionadas con la medida.

En la escuela hay que enseñar qué, cómo y con qué medir, pero la labor del maestro/a no se limita sólo a eso, sino que también hay que desarrollar la comprensión, es decir, los alumnos deben ser capaces de comprender las magnitudes, deben conocer los materiales apropiados para medir.

Una metodología muy aconsejable es que el maestro/a sugiera, pregunte, dude, y busque con el alumno, aceptando el error y la duda, no despreciándolos.

4.1 Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje

Como siempre, conviene ir de lo concreto a lo abstracto, de lo fácil a lo difícil. Permitir al alumno que descubra y que aprenda de sus errores. Fomentar las discusiones colectivas o en grupo, permitiendo el aprendizaje en diálogo y la confrontación de ideas. Utilizar la vida como fuente de situaciones problemáticas. Usar y fomentar el sentido común.

A partir de los seis años aproximadamente (para indicar una edad orientativa) los procesos mentales de los niños empiezan a ser menos rígidos. Así, poco a poco, los niños van siendo capaces de analizar más de un condicionante a la vez, de comprender mejor la realidad.

Pero esta es una evolución continua y progresiva, no inmediata. Por esto, a los seis años aún no es capaz de resolver cuestiones que impliquen gran reflexión. Por ejemplo es difícil comprender un razonamiento comparativo, lo cual es absolutamente imprescindible para comprender el concepto de medida, aunque sean capaces de realizar mediciones según normas dadas de antemano. Tal vez porque no se ha aprovechado suficientemente su sentido intuitivo de la proporción.

A los siete años (también como edad orientativa), el niño va utilizando cada vez más la lógica, pero solamente si se habla de elementos concretos. Puede hacer agrupaciones y reconocimiento de figuras. Ya puede comprender el concepto de medida directa. También es capaz de analizar **seriaciones** es decir, ordenar un conjunto de elementos mentalmente y puede reconocer, en objetos de igual forma, cuál es mayor o menor.



Seriaciones. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Todo aquello que resulte abstracto e hipotético estará excluido de los procesos lógicos del niño, podrá calcular medidas indirectamente mediante cálculos a partir de fórmulas de un modo mecánico, pero no comprenderá por qué esas formulas dan el resultado correcto. Estas operaciones formales (como las denominó Piaget) no tendrán lugar hasta aproximadamente los once años, siempre y cuando el niño haya superado con éxito los estadios anteriores, es entonces cuando se puede abordar el asunto de las medidas indirectas y del origen lógico de las fórmulas.

Poco a poco, ayudado por la mayor cantidad y calidad posible de experiencias, según Van Hiele, el niño sigue desarrollando sus capacidades abstractas expresadas verbalmente o a través de hipótesis.

En esta etapa el desarrollo evolutivo del niño/a indica que ya puede haber adquirido el principio de conservación, en particular el de la longitud. El niño/a tiene adquirido el principio de conservación si comprende que la cantidad de algo se mantiene aunque cambie la forma.



Experiencia sobre la conservación de la longitud. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Juego para experimentar la Conservación del área. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Propongo que el alumno o alumna del Grado de Maestro/ de Primaria, visiones las experiencias adjuntas y diseñe una experiencia para la conservación del área, partiendo de los juegos de disección como el Tangram y los propuestos en el juego del vídeo 20. También es interesante enfrentar al alumnado a un error sistemático, la concepción de que área y perímetro son proporcionales. Emma Castelnuovo lo ilustra con un cordel anudado, también podemos utilizar mallas o el geoplano:

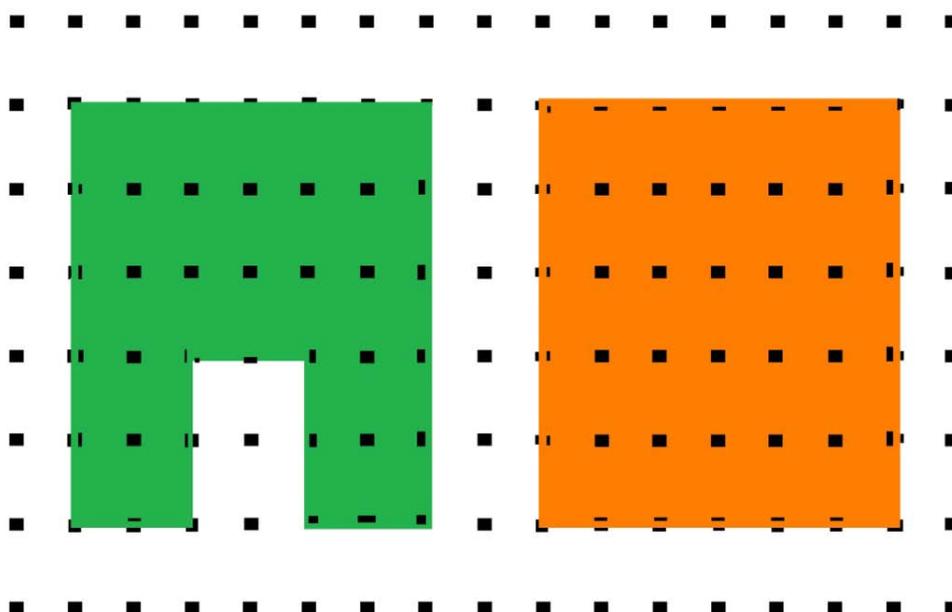


Ilustración 13. Geoplano ilustrando la no proporcionalidad de área y perímetro.



Experiencia sobre la conservación de la capacidad. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Juego para experimentar la conservación del volumen. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

También será interesante para el alumnado del Grado de Maestro/a de Primaria la lectura del libro *Africa Counts* de Claudia Zaslavsky, rastreando modos de medir de otras culturas, que pueden ayudar en ocasiones a comprender la importancia de la elección de la unidad por contraste con las medidas tradicionales de la propia cultura y en otras ocasiones a integrar culturas diversas en una misma aula. Contar la historia económica, social y política del nacimiento del sistema métrico decimal, completará la posibilidad de su comprensión.



4.2 Contenidos, recursos y situaciones

CONTENIDOS MATEMÁTICOS

	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
Longitud, peso/masa, capacidad y superficie	Comparación de objetos según longitud, peso/masa o capacidad, de manera directa o indirecta.	Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales en contextos cotidianos.	Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales
	Medición con instrumentos y estrategias no convencionales.	Unidades de medida convencionales: múltiplos y submúltiplos de uso cotidiano, utilización en contextos reales. Elección de la unidad más adecuada para la expresión de una medida.	Desarrollo de estrategias personales para medir figuras de manera exacta y aproximada.
	Utilización de unidades usuales e instrumentos convencionales para medir objetos y distancias del entorno.	Comparación y ordenación de unidades y cantidades de una misma magnitud.	Equivalencias entre unidades de una misma magnitud.
	Estimación de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades...) en contextos familiares.	Elaboración y utilización de estrategias personales para medir.	Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida
	Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.	Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana.	Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones
	Resolución de problemas de medida explicando el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.	Utilización de unidades de superficie.



	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
		Interés por conocer y utilizar la medida y por expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades utilizadas y explicando oralmente y por escrito el proceso seguido.	Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición.
MMedida del tiempo	Unidades de medida del tiempo: el tiempo cíclico y los intervalos de tiempo (lectura del reloj, las horas enteras, las medias).	Unidades de medida del tiempo: lectura en el reloj analógico y digital.	Unidades de medida del tiempo y sus relaciones.
	Selección y utilización de la unidad apropiada para determinar la duración de un intervalo de tiempo.	Confianza en las propias posibilidades y por compartir con los demás los procesos que utilizan la medida para obtener y expresar informaciones y para resolver problemas en situaciones reales.	La precisión con los minutos y los segundos.
		Interés por la presentación limpia y ordenada del proceso y la expresión de medidas.	Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales.
Sistema monetario	Valor de las distintas monedas y billetes. Manejo de precios de artículos cotidianos.		
	<i>Curiosidad por conocer y utilizar</i> la medida de algunos objetos y tiempos familiares e interés por la interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre medidas.		
	Cuidado en la realización de medidas		



	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
Medida de ángulo			El ángulo como medida de un giro o abertura. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medir ángulos.
			Utilización de la medición y las medidas para resolver problemas y comprender y transmitir informaciones.

RECURSOS

Son necesarios materiales diversos. Hay que ayudar al niño en la experimentación y observación, ofrecerle materiales apropiados para que pueda comparar. Algunos de los materiales más importantes para que el niño establezca equivalencias en relación con las magnitudes son:

- Longitud: cuerdas, hilos, regletas, palillos de mesa (mejor que cerillas para evitar riesgos con el fuego), cintas métricas. Juegos de medidas de longitud, Juegos de medidas de peso, Balanza, Juego de medidas de capacidades.
- Masa y Peso: Balanza de platillos, clavos, canicas, arena, juegos de medidas de peso.
- Capacidad: Agua, arena, recipientes de diferentes formas y tamaños, probetas graduadas, juegos de medidas de capacidad.
- Tiempo: Relojes de arena, cronómetros.
- Superficie: Papel de cuadrículas diferentes, tijeras.
- Volumen: Sólidos para ensamblar.

SITUACIONES

Actividades de percepción y comparación: Se debe comenzar con comparaciones directas. En el caso de la longitud el desplazamiento permite superponer dos o más objetos y comprobar así cuál es el más largo. En el caso de la masa se utilizan las dos manos como si fueran los platillos de una balanza. Para la capacidad se recurrirá al transvasado de líquidos



de una vasija a otra. Para la superficie, pavimentando una con otra. La comparación directa del tiempo es más difícil.

Pero en algunas ocasiones la comparación directa es muy difícil y costosa, por lo que hay que realizar una comparación indirecta. Por ejemplo en el caso de medir una longitud, se pueden utilizar métodos como pueden ser una cuerda o hilo que se llevará sobre las longitudes a comparar, se realizan marcas diferentes y luego en función de dichas marcas se observa que longitud es mayor; también se pueden utilizar medidas antropométricas como pies, palmos, zancadas, brazos... aunque puede presentar errores como por ejemplo que estiremos más una vez que otras la palma de la mano, que demos zancadas más o menos grandes.



Experiencia sobre la conservación de la capacidad. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.



Actividades de medición. Pulse [aquí](#) para ver la web.

Actividades didácticas diseñadas para el aprendizaje sobre la amplitud angular y su medida directa, el área y su medida directa, fórmulas para las áreas de polígonos, longitud de la circunferencia, etc, las encontraréis en la bibliografía recomendada, parte de ella en línea, que sugiero que visitéis aprovechando las ventajas de las características del curso.



Peso y masa. Pulse [aquí](#) para ver la web.

El volumen, su medida y relación con la capacidad en **Marisa Carrillo.** Pulse [aquí](#) para ver la web.

ERRORES COGNITIVOS

El no utilizar de manera correcta los instrumentos de medida provoca errores en las mediciones.

Otro problema con el que se encuentran los alumnos es que los enunciados de los problemas, en muchas ocasiones, aportan una serie de datos completamente irreales que confunden al alumno ya que no puede usar su sentido común. Por ejemplo que una bolsa de la compra pese 200 Kg.

Los alumnos suelen tender a pensar que todas las medidas son en números enteros. Esto es consecuencia de que en muchas ocasiones se confunde medida entera con medida exacta y



se tiende a redondear. Pero realmente en la vida cotidiana son más las medidas que podemos encontrar con decimales que exactas.

Se debe ejercitar la habilidad del niño para resolver cuestiones que se encuentran en su día a día. Por ejemplo a un niño se le enseña a calcular la superficie de terrenos con forma regular, el volumen de sólidos regulares... pero no la tela que se necesitaría para realizar un vestido; por eso hay que enseñarles a descomponer superficies.

Para esta parte del bloque encontraremos animaciones en línea si pulsamos sobre el ítem Medida de [este enlace](#).

En 1983, en las III JAEM, celebradas en Zaragoza, el profesor Hans Freudenthal nos dijo, entre otras muchas cosas que hay una geometría que se aprende por sí misma, siempre que se le dé la oportunidad de desplegarse. En esa misma conferencia nos hizo saber que la comprensión geométrica de las razones, de la proporción y de la escala, tiene lugar a una edad muy temprana. Nos refirió algunas anécdotas al respecto: un niño de cinco años estima la altura de las nubes aplicando la idea intuitiva de proporción geométrica; otro niño de siete años comprende cómo calcular la altura de una torre midiendo la distancia a su pie y comparando con la distancia al pie del palo utilizado para dirigir una línea visual al extremo más alto de la torre, sin embargo, es popular el hecho de que a los 16 años los alumnos no entienden el cálculo con razones. Algo se ha hecho mal: se ha perdido la ocasión de enlazar con el curriculum nulo, con aquella riqueza geométrica de la intuición infantil.

Sería de desear que los alumnos de este curso no desaprovecharan ese caudal para, de ese modo, dotar a las fracciones de significado, tras trabajar desde el currículo nulo el concepto de razón y de proporción en las fases previas a la introducción de las fracciones y la medida.

Actividades que dan sentido y explican el mundo próximo a los alumnos de primaria, como las mostradas por el profesor Freudenthal, deben acompañar a las actividades sobre razones, que pueden enriquecerse con materiales como tablas de fracciones, dominó de equivalencias de fracciones, círculo de fracciones (todos ellos susceptibles de autoconstrucción) así como con Calculadoras Básicas.

En el vídeo siguiente se comienza precisamente hablando de la falta de proporción, acertadamente, según mi punto de vista, para dar paso al **análisis de la proporción** concepto cotidiano desde las antiguas civilizaciones, coherentemente con la propuesta piagetiana y la experiencia del profesor Freudenthal.



Los conceptos de razón y de proporción también habrán sido trabajados en fases previas, en las actividades aritméticas sobre fracciones, mediante Tablas de Fracciones, Dominó de Equivalencias de Fracciones, Círculo de Fracciones, Calculadoras Básicas y en actividades geométricas como las discusiones sobre si todos los rectángulos son semejantes o cómo caracterizar aquellos que sí lo son, haciendo uso de los criterios del eclipse o de la diagonal.



Análisis de la proporción. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

TEMA 5. DIDÁCTICA DEL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD

Tratamiento de la información, probabilidad y estadística. Contenidos mínimos en Primaria.

- Recogida, organización y representación de la información.
- Tablas de datos.
- Tipos de gráficos.
- Aplicaciones didácticas en las distintas áreas y en la interpretación de datos.
- Utilización de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación para el tratamiento de datos.
- Introducción a la Estadística y la Probabilidad.
- La Estadística y sus variables.
- Fenómenos aleatorios y concepto de probabilidad.
- Consideraciones metodológicas generales.
- Juegos combinatorios.
- Frecuencias relativas.



5.1 Estadística

5.1.1. *Contenidos Didácticos: desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje*

Existen pocos estudios que nos guíen en la empresa de decisión del momento en que podemos introducir los variados conceptos estadísticos, pero sabemos que el uso de la estadística por los gobernantes es muy antiguo. Siguiendo la idea de que los conceptos difíciles de aprender, generalmente nacieron en etapas tardías de la historia, cabe intuir que podremos hacer estadística desde edades tempranas, acomodando los niveles de exigencia a esas edades. Por otra parte, incluso adultos con formaciones académicas superiores, cometen los mismos errores de bulto que los estudiantes de cursos bajos. Dada la ignorancia aludida y la extensión cronológica de los mismos errores, tal vez convenga sumar a una secuenciación por ciclos que respete las pocas pautas aportadas por la investigación, el tratamiento de la estadística por **proyectos**, pues, por un lado es propio de la estadística trabajar por proyectos y por otro, el trabajo por proyectos permite **respetar los ritmos de aprendizaje y los niveles competenciales de partida** del alumnado: desde el simple recuento que está al alcance de los niveles inferiores, hasta el modelo probabilístico al que pueden acercarse los mejores alumnos del ciclo superior.

Respecto a los errores mencionados, recomiendo que el alumno o la alumna pregunten a personas de distintas edades, género, ámbitos profesionales o clases sociales ¿cuál es la media del peso de las 10 personas que han subido a un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres, si las mujeres pesan por término medio 60 Kg y los hombres 90?

O la típica obsesión por pesar el peso ideal, considerado como la media de peso de una población sana, sin tener en cuenta que es poco frecuente que los individuos de la población pesen ese peso, ya que no es un dato individual sino una medida del comportamiento de la muestra o de la población, en su caso, no de los individuos tomados en su singularidad.

Otro error frecuente que afecta a la población adulta, con una cultura, al menos de nivel de lector de periódicos, es el que se da más veces de las recomendables, cuando el periodista presenta las frecuencias relativas de un fenómeno estadístico en forma de porcentajes y,



misteriosamente, la suma de los porcentajes sale más de 100, sin que se inmute ni el periodista ni el lector.

Son situaciones que nos hablan de la deficiencia de la cultura estadística de la población adulta, que entrarían cronológicamente en contradicción con el principio evolutivo antes expresado, si no encontramos otra explicación más plausible: la tardía introducción de la estadística en los programas escolares, que explicaría el problema del periodista y sus lectores, y acorde con ello, la deficiente preparación en estadística de los propios maestros, que ha producido un efecto de dilatación del problema en el tiempo.

5.1.2. Contenidos, recursos y situaciones

CONTENIDOS MATEMÁTICOS

	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
GRAFICOS	Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.	Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos.	Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
	Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.	Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.	Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos.
		Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana.	Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos.
		Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.	La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares.



	Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.	Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.
		Obtención y utilización de Información para la realización de gráficos.

RECURSOS

Entre el material manipulable clásico se encuentran los dados, barajas, dominós, ruletas, urnas, loterías quinielas. Y entre los instrumentos creados exprofeso destacan los diagramas, los gráficos, los generadores aleatorios y los entornos informáticos, TIC.



TIC. Pulse [aquí](#) para ver la web.

SITUACIONES

Investigaciones y proyectos

Ya he expresado la idoneidad del trabajo por proyectos como recurso para el aprendizaje de la estadística. Dichos proyectos pueden revestir una complejidad gradual e inclusive, puede reducirse el trabajo a una o algunas fases iniciales del mismo, consiguiendo así la necesaria secuenciación por ciclos y la atención a la diversidad en el aula. Los proyectos son contenedores de multitud de situaciones didácticas muy variadas, a través de las cuales se recorrerán contenidos del bloque de estadística, pero también de los bloques de aritmética, geometría, medida y proporción. En las fases finales, además, el proyecto puede devenir en un proyecto para trabajar la probabilidad como herramienta de la inferencia estadística e incluso como modelo probabilístico.



Idoneidad. Pulse [aquí](#) para ver la web.

En la asignatura de Matemáticas del Grado de Maestro/a de Primaria, el profesor D. Manuel López Pellicer propone el tratamiento de tareas estadísticas mediante el programa STATGRAPHIC, ejemplificando con detalle su uso. Llegados a las fases más avanzadas del



proyecto, en tercer ciclo por ejemplo, puede resultar eficiente el uso de esta herramienta, una vez descontado el esfuerzo adicional necesario para aprender a utilizarla. El proyecto, de este modo, puede plantearse objetivos más ambiciosos, gracias a la descarga de trabajo que puede suponer el programa informático, en caso de trabajar con grandes cantidades de datos. El tiempo ahorrado permitirá prestar más atención a los conceptos, sus relaciones y su campo de aplicación. Otros programas, diseñados especialmente para la enseñanza, son: STATLAB, GASP Y PRODEST. Entre los programas comerciales destacan SPSS, el mencionado STATGRAPHIC, SYSTAT Y BMDP, entre otros.

Datos y fuentes de datos

Las fuentes de datos deberán estar más cercanas al entorno de los niños y niñas, cuanto menor sea el nivel del ciclo. Procurando siempre que la manipulación numérica necesaria para su posterior proceso esté en el nivel adecuado. El primer paso, la recogida de datos y su registro, comienza en educación infantil. En Primaria, en el Primer Ciclo, se puede ampliar el entorno suministrador de datos y, a los días que llueve, está nublado o hace sol, se pueden añadir número de hermanos, número de hermanas, primos, primas, tíos, tías o sus edades, etc. Datos que pueden obtener pasando un sencillo cuestionario, a modo de preparación para abordar más tarde la elaboración de encuestas sencillas.

Aunque en el primer ciclo no se habrá introducido la noción de variable, no deja de ser cierto que se habrá trabajado con variables, unas cualitativas y otras cuantitativas. En el segundo ciclo se puede intentar que sigan registrando colecciones de datos como número de personas con ojos azules, castaños, verdes, grises o negros en la clase, sus series favoritas, sus notas en matemáticas o sus tallas de zapatos y que distingan estos dos tipos de variables, aún sin nombrarlas.

En el tercer ciclo se puede comenzar a utilizar datos de variables con un amplio conjunto de valores, que obliguen a hacer agrupamientos, ante la dificultad material de llevarlos a un gráfico medianamente aceptable en sus cuadernos, en el encerado o en la pantalla del ordenador, con lo que se planteará la necesidad de trabajar con intervalos, no es conveniente todavía nombrarlos, pero sí negociar con la clase en qué grupo ponemos los valores de los extremos para que estén todos los datos y no se repita ninguno.



Comprensión de tablas y gráficos estadísticos



Animación en línea. Pulse [aquí](#) para ver la web.

El registro de datos puede ser ingenuo en Infantil y comienzo del Primer Ciclo de Primaria, pero el incremento de datos en los proyectos de niveles más avanzados, requerirá establecer unas pautas claras para esos registros, para los que, en un principio se propondrá al alumnado que aporte ideas que organicen eficazmente tanta información, sólo tras discusiones en pequeño y gran grupo, se aportará la tabla de frecuencias absolutas para Primer y Segundo Ciclo, con un conjunto de valores de la variable que haga cómoda la organización de los datos sin agrupar. En tercer ciclo, se introducirá en las tablas la frecuencia relativa, preparando el terreno para una aproximación a la probabilidad. También en Tercer Ciclo se comenzará a trabajar con dos variables y la correspondiente tabla de doble entrada. Se insistirá en mostrar la eficacia del registro de datos en tablas, tanto las que surjan del proyecto, como las que encuentren en los medios de comunicación, se trabajará el análisis de los datos y se extraerán conclusiones. En caso de adaptaciones curriculares por sobredotación, se puede trabajar con agrupación de datos y ayudar a descubrir la necesidad de un representante del intervalo, la marca de clase, para facilitar los cálculos de las medidas de centralización y de dispersión.

No debemos olvidar la dificultad inherente a la tarea de organizar los datos en tablas de frecuencias, pues en el momento en que lo hacemos, se pierde la información concreta de los individuos-variables investigados y comenzamos a hablar de conceptos abstractos referentes a la población o la muestra, hablamos ya de una distribución de frecuencias, concepto que, a menudo, es más difícil de aprehender que el propio concepto de función que cae fuera del currículo de Primaria. Lo mismo ocurre con los gráficos estadísticos, por lo que hay que tener mucho cuidado y dedicarles el tiempo suficiente para que puedan aprender a construir los distintos tipos, extraer información de ellos cuando los encuentren en prensa, TV o Internet y que aprendan a distinguir en qué casos conviene qué gráfico.

No hay que perder de vista que la construcción de un gráfico requiere familiaridad con el fenómeno representado, capacidad para hacer el tipo de representación gráfica elegida y tener disponibles los conocimientos matemáticos involucrados en la construcción de ese tipo de gráfico, como manejo de los sistemas numéricos a nivel de representación geométrica, ordenación y cálculo.



Teniendo en cuenta los conflictos que acarrea el aprendizaje de los gráficos, podemos aproximar una secuencia en su introducción. En Primer Ciclo de Primaria la construcción de gráficos puede ser tan simple como poner fichas perforadas en las varillas que representan las variables, por ejemplo alumnos que han faltado a clase cada día de la semana. Concluida la semana se lee literalmente ¿cuántos alumnos faltaron el lunes? al tiempo que se visualiza el gráfico de barras. En Segundo Ciclo podemos ya esperar que se pregunten y se respondan a preguntas como ¿qué día faltaron más niños el lunes o el viernes? Y que sean capaces de diseñar gráficos de barras y de sectores sin el apoyo material que se usaba en el primer ciclo. En Tercer Ciclo, podríamos esperar que se fijaran qué día de la semana han faltado más niños y que se formularan la pregunta de ¿por qué?, incluso que elaboraran una respuesta plausible y que pudieran discutir entre ellos si la respuesta dada es fiable. También en este ciclo se hará hincapié en la conveniencia de unos u otros gráficos según las variables en juego; la escala adecuada para que el gráfico “quepa” en el espacio que le hemos reservado; el número de divisiones en los ejes para trasladar todos los datos de la tabla; la necesidad de que los diagramas de sectores muestren en ellos la misma proporción que la tabla indica para cada variable. Es en este ciclo donde se puede iniciar al alumnado en el uso de programas estadísticos para el ordenador que incorporan siempre la opción de elegir y dibujar los gráficos estadísticos más comunes. Al usar esta herramienta, se puede hacer mayor hincapié en que el alumnado seleccione adecuadamente el gráfico para su problema, ya que la tarea de calcular frecuencias, medidas de centralización o dispersión y de diseño del gráfico corre a cuenta del ordenador.

Medidas de posición central

En el primer párrafo de la sección 1, he expuesto varios ejemplos que muestran que el concepto de media no es trivial, sobre todo el de media ponderada. También presenta sus dificultades el concepto de moda que, a pesar de ser omnipresente en los medios en su acepción coloquial, sufre un oscurecimiento al trasladarlo al aula, dando lugar a confusión entre el valor de la variable que se revela como moda y su frecuencia relativa.

En el Tercer Ciclo, debido a la frecuencia de estos errores entre toda la población, es recomendable tratar estas medidas de centralización no sólo desde el punto de vista de su cálculo sino desde el punto de vista de su potencial inducción al error, trabajando en el aula las actividades destinadas a ello como acertijos. Siempre se puede sacar tiempo para ello si



se ha trabajado con un programa estadístico para el ordenador, que, al liberar de cálculos al alumno, deja tiempo para la reflexión y búsqueda del gazapo escondido en el acertijo.

Características de dispersión

Uno de los errores sobre la media anunciados al principio de esta sección, hace referencia al peso ideal. Habrá que realizar muchas actividades entre las que se vea que una distribución con una media determinada, puede pertenecer a una población en que ningún individuo posea ese valor de la característica medida, u otras en las que todos los individuos posean ese valor, u otras en las que la mayoría está cerca de ese valor, u otras en las que la mayoría está alejada de ese valor. ¿Quiere decir que cuando la vida media de una población es de 70 años, todos se mueren a esa edad? ¿Significa lo mismo para poblaciones con baja mortalidad infantil que para aquellas en que la mortalidad infantil es muy elevada? Es decir, hay que realizar suficientes actividades que traigan de la mano la necesidad de una medida de dispersión, de una medida que dé cuenta de la intensidad con que los datos se desvían de la media.

5.2 Probabilidad

5.2.1. Contenidos didácticos: Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje

Existe disensión entre los distintos autores, respecto a la posibilidad de desarrollar los contenidos probabilísticos en primaria.

Una objeción bastante aceptada se basa en la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. No obstante, parece que esa objeción es válida fundamentalmente en las sociedades occidentales altamente tecnificadas, donde todo parece ser predecible, todo parece estar determinado, sólo hace falta la herramienta adecuada y el resultado apetecido estará en nuestras manos. Es característica de estas sociedades la exigencia de prevenir incluso catástrofes naturales como los ciclones, imprevisibles por pertenecer al abanico de resultados de un modelo de caos determinista.

En las sociedades primitivas, la inseguridad que produce la falta de información sobre los acontecimientos futuros, se canaliza hacia concepciones mágicas adivinatorias.



Unos y otros **necesitan** una relación causa efecto que permita controlar el efecto a través de la manipulación de la causa. Desde esa necesidad es desde donde Piaget y otros niegan la posibilidad de existencia de una idea sobre el azar a edades tempranas, en las que todavía no se ha desarrollado la comprensión de la relación causa-efecto.

Sin embargo, las deficiencias que presenta la mayoría de la población adulta en materia de probabilidad inclinan a pensar más en falta de experiencias adecuadas para alcanzar mejores niveles de razonamiento probabilístico que en una vinculación de la edad a esos niveles, es decir, parece más adecuado el modelo Van Hiele, desarrollado en el tema de Didáctica de la Geometría que en el modelo de Piaget.

En cualquier caso, los problemas de azar están presentes en todas las culturas. Recordemos que una de las seis actividades invariantes, según Bishop, es el juego, en particular el juego de azar.

La intuición del azar

No obstante, tanto en unas sociedades como en las otras, niñas y niños y personas adultas juegan, juegan a juegos de azar y desde edades muy tempranas tienen una idea intuitiva de este concepto e incluso de una mayor o menor probabilidad de un suceso u otro, aunque no en términos de cálculo, sino intuitivamente. Según Fischbein, ésta intuición está presente desde los primeros momentos del primer ciclo de la etapa de Primaria, como lo corroboran las decisiones acertadas que toman los niños y niñas en juegos sencillos de azar. Sin embargo el test de Green, verificado por Alayo y otros, citados por Fischbein y otros en 1991, confirman que el sentido innato de probabilidad es por lo general demasiado ingenuo y lleva pronto a errores cuantitativos si no se tienen experiencias suficientes que lo doten de una comprensión más racional y sólida.

La estimación de la probabilidad por la frecuencia relativa

Y, si existe una buena práctica de enseñanza aprendizaje, si se permiten suficientes experiencias, muy pronto se puede manejar una estimación de la probabilidad, a partir de la frecuencia relativa observada e incluso estimada, para tomar decisiones eficaces en situaciones didácticas de estimación de ocurrencia o no de un suceso. El interés de cruzar con semáforos en verde delata que estiman que la frecuencia de accidentes cruzando de este modo es más baja que cruzando por cualquier otro punto; la conveniencia de acostarse



pronto para no llegar tarde al cole indica que estiman que los días en que se acuestan tarde tienen una frecuencia relativa de retrasos mayor que cuando se acuestan pronto. El interés en “hacer los deberes” delata su estimación de que la frecuencia relativa de éxitos en clase es mayor los días en que se ha trabajado en casa, y, a partir de esas estimaciones frecuenciales, toman decisiones sobre sus actuaciones, es decir, actúan intuyendo la probabilidad de éxito en sus objetivos.

En la adolescencia, estas estimaciones pueden llevarles a la elaboración de estrategias personales de éxito en función de las frecuencias relativas primero intuitidas, luego estimadas, más tarde conjeturadas y luego confirmadas mediante el cálculo.

Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

En cuanto a la dilucidación de los conceptos posibilidad-probabilidad, cabe señalar que existen errores conceptuales hasta edades muy avanzadas. Es clásico el error que se produce cuando se pregunta ¿qué puede pasar cuando cruzas una calle? La respuesta suele ser correcta: Puedes tener un accidente o no tenerlo. Se ha enunciado la posibilidad. Inmediatamente, si se pregunta qué probabilidad hay de tener un accidente al cruzar una calle, es abrumadora la cantidad de respuestas que dan un 50%, confundiendo la cantidad de posibilidades con la probabilidad. Es un resultado habitual entre alumnos y alumnas de nivel pre-universitario. Esto sucede porque las primeras experiencias sobre probabilidad son experiencias binarias, como el lanzamiento de una moneda para el que, muy temprano, se descubre que la probabilidad de estas dos posibilidades es del 50%. Las experiencias posteriores, en las que la probabilidad se puede escribir en términos de una proporción, están ligadas al momento en el que tal concepto, proporción, puede ser abordado. Sólo entonces se podrán estudiar comparativamente probabilidades expresadas mediante fracciones con denominadores diferentes. En situaciones didácticas favorables, con un buen facilitador/a y frente al reto asequible y bien preparado por el maestro o la maestra, las criaturas de 10 años pueden comparar probabilidades expresadas mediante cualquier tipo de fracciones. También en este nivel se comprueba que la falta de experiencias en probabilidad puede llevar a [conclusiones erróneas](#) incluso a añosos expertos matemáticos, lo cual abunda en las críticas a las teorías genéticas del desarrollo cognitivo por etapas y refuerza las teorías de la construcción social, al estilo Vygotsky, y de la necesidad de experiencias abundantes para potenciar la interacción continua entre lo intuitivo, lo



empírico y lo formal, para pasar de un nivel de comprensión a otro, como indica el modelo van Hiele.

No es exagerado insistir en este extremo, pues, como constató el ICMI de 1986, y las cosas no han cambiado sustancialmente desde entonces, existe escaso interés por lo estocástico, a pesar de un florecimiento en los 90 en que algunas propuestas excelentes como la de Engels y Vargas de 1972, alcanzaron popularidad entre el profesorado más involucrado en la renovación. Así pues, en este curso defenderemos con fuerza la opinión de que los niños y niñas deben encontrarse con el azar cuanto antes, desde los primeros años escolares, para aprovechar sus intuiciones tempranas y enlazarlas con experiencias adecuadas que les eviten la consolidación de vicios erróneos. Además, según Freudenthal (1973), la matematización de una situación real se presenta de forma directa, clara y sencilla en situaciones de azar, entre otras razones, porque el aparataje matemático requerido es elemental: recuentos, porcentajes y fracciones.

5.2.2. Contenidos, recursos y situaciones

CONTENIDOS MATEMÁTICOS

	PRIMER CICLO	SEGUNDO CICLO	TERCER CICLO
CARÁCTER ALEATORIO		Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto.	Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.
	Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.	Introducción al lenguaje del azar.	Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas.



	Participación y colaboración activa en el trabajo en equipo y el aprendizaje organizado a partir de la investigación sobre situaciones reales. Respeto por el trabajo de los demás.	Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica.	Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.
--	---	--	--

RECURSOS

También para el aprendizaje de la probabilidad, como en el de la estadística, dada la interdependencia de los dos apartados, entre el material manipulable clásico se encuentran los dados, barajas, dominós, ruletas, urnas, loterías quinielas. Y entre los instrumentos creados exprofeso destacan los diagramas, los gráficos, los generadores aleatorios y los entornos informáticos.



TIC. Pulse [aquí](#) para ver la web.

SITUACIONES

El alumnado progresa paulatinamente en el aprendizaje de la probabilidad, por lo que será conveniente no presentar situaciones didácticas prematuras, para no echar a perder el estímulo del éxito en el desarrollo de una tarea. En un principio, el lanzamiento de una moneda puede ser utilizado como una actividad propia del currículo nulo a muy temprana edad. En el juego de la taba, está presente el concepto de sucesos no equiprobables y es un juego frecuente todavía en muchas culturas. El lanzamiento de dados, por el tamaño, familiaridad y concreción de su espacio muestral, es idóneo para introducir la probabilidad de sucesos equiprobables. La ruleta puede ser utilizada como modelo de sucesos equiprobables –cuando sus sectores guardan simetría rotacional- o no equiprobables cuando no guardan simetría. Los juegos de naipes, dada la amplitud de su espacio muestral, evidencian que los diagramas de árbol y las tablas de contingencia se quedan cortas, se hacen incómodas y en consecuencia reclaman otras estrategias, viene aquí en nuestro auxilio la combinatoria, como herramienta eficaz para recuentos donde los objetos no son



concretos, no están a la vista, no son manipulables físicamente, no son ni siquiera objetos mentales actuales, sino potenciales.

En los libros de texto de primaria de cualquier editorial, encontraréis abundantes ejemplos de actividades que se ciñen a lo antedicho.

Son actividades cuyo método de resolución se basa en técnicas de conteo y teoremas de las probabilidades, aunque en Primaria no se expliciten.

Juegos y sorteos: generadores aleatorios

Un método de gran interés para la familiarización del alumnado con el azar es el llamado Método de Montecarlo, consistente en simular un experimento aleatorio construyendo un modelo con las variables aleatorias que entran en juego y realizando sorteos. Esto exige un análisis minucioso de la situación y, por la sencillez del procedimiento, pone al alcance de todo el alumnado problemas que por el método algebraico serían imposibles de abordar tan pronto.

Es conveniente partir de los juegos y sorteos propios de su ambiente cultural para aprovechar el currículo nulo en las actividades y proponer actividades en las que se detecten los diversos grados de aleatoriedad de los juegos: juegos con estrategia ganadora como el tres en raya, juegos de cartas en los que se mezcla el azar con las estrategias de juego más o menos elaboradas según la edad y experiencia y juegos puramente aleatorios como las loterías.

Según Borrás (1996) De acuerdo con la naturaleza de lo aleatorio y su modelización, es crucial para el aprendizaje analizar sorteos en situaciones diversas con grados crecientes de dificultad y utilizando una amplia variedad de generadores aleatorios: monedas y discos, dados poliédricos, discos y dados sesgados, ruletas, etc. En los que es transparente el tipo de sorteo. Después, pueden utilizarse ventajosamente, por la facilidad y rapidez con que se sortea, tablas de números aleatorios y programas de ordenador, o calculadoras que generen números aleatorios.

Para pasar de un tipo concreto de generadores a otros más simbólicos, es conveniente que el alumnado genere tablas de números aleatorios a partir de los generadores concretos, así obtendrá una comprensión del significado y funcionamiento de estas tablas y luego de los generadores aleatorios en soporte informático. Dada una situación aleatoria, es conveniente su simulación con la ayuda de generadores aleatorios como los mencionados u otros como



cartas o urnas, para descubrir el modelo subyacente al problema. Antes de realizar el sorteo pueden formularse conjeturas que se reforzarán o desestimarán una vez completada la experiencia.

Estrategias

También se tendrá en cuenta el interés de manejar gráficos como los árboles,

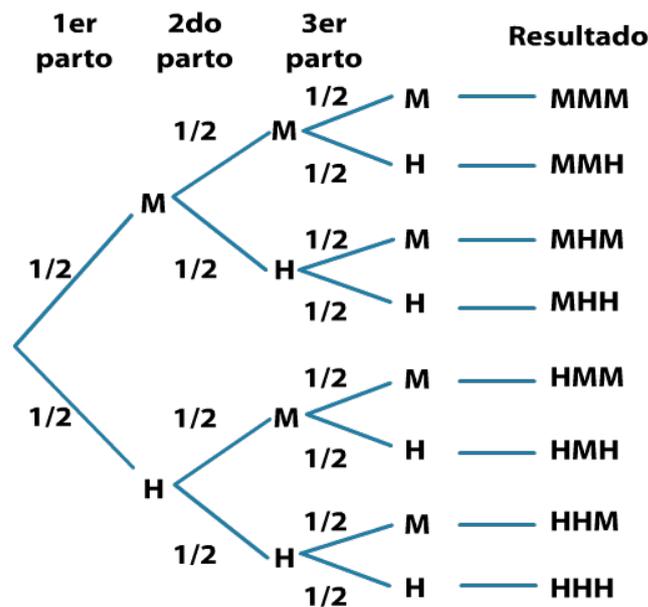


Ilustración 14. Diagrama de árbol.

las tablas de contingencia:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ilustración 15 Tabla de contingencia.



y los ábacos probabilísticos.

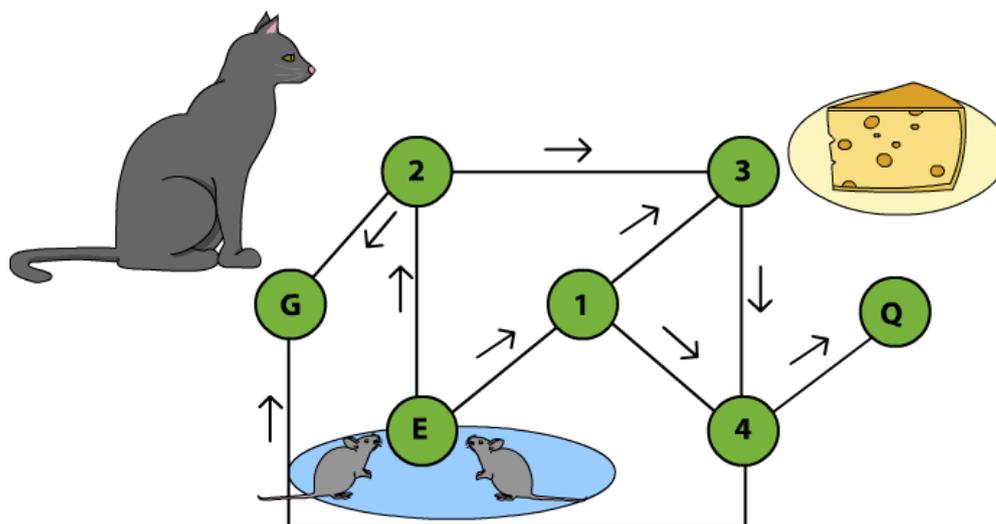


Ilustración 16 Ábaco probabilístico.

La estrategia menos presente en los libros de texto es la estrategia de los ábacos probabilísticos, a pesar de que con esta herramienta se puede modelizar el experimento aleatorio jugando con dados primero, para entrar en la comprensión del problema mediante la experimentación y estimación frecuencial de probabilidades, de ahí, mediante diagramas de árbol se puede dar la solución concreta y, en ocasiones, incluso la solución general. El uso del ábaco probabilístico para obtener la solución sería la última fase, que los alumnos del último ciclo de primaria ya pueden comprender. A continuación un enlace que ofrece ejemplos al respecto:



El azar y su aprendizaje. Pulse [aquí](#) para ver la web.

El trabajo en grupo

Este tipo de organización es fundamental en el tratamiento de la probabilidad, pues permite descubrir la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad, con un gasto de tiempo sensiblemente menor y, aunque las TIC lo reducen mucho más, como se habrá visto en la asignatura de Matemáticas, es importante la experiencia personal antes de pasar al uso de programas informáticos de estadística y probabilidad, por lo que de aprendizaje significativo suponen y porque, en el caso de las **TIC**, a veces, lo que no se va en lágrimas se va en



suspiros, es decir, el tiempo ahorrado en cálculos, se lo lleva el aprendizaje de un programa que, por otra parte, pronto se queda obsoleto. Distinto es el esfuerzo dedicado a ese aprendizaje, en una empresa, donde, una vez aprendido, va a ser utilizado y rentabilizado durante un tiempo suficiente, no así en el aula, que, una vez trabajado el tópico, pasaremos a otros tópicos y ese aprendizaje tecnológico nunca más lo volveremos a utilizar o no de la misma manera, aunque sus trazos generales permanecerán y serán de gran ayuda en la próxima ocasión, si se presenta.



TIC. Pulse [aquí](#) para ver el vídeo.

Para todo el bloque encontraremos animaciones en línea si pulsamos sobre el ítem Probabilidad de [este enlace](#).

No olvidemos el manejo de dispositivos aleatorios cotidianos, comercializados o de autoconstrucción.

Por último puesto que la resolución de problemas es la actividad fundamental en el aula de Matemáticas y este curso es on line, propongo un enlace para resolver problemas de Primaria de cualquiera de los **bloques**  estudiados en el curso:



ProblemáTICas. Pulse [aquí](#) para ver la web.



CONCLUSIONES

El conocimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos, la destreza en la resolución de problemas y el dominio de los modelos más relevantes sobre el desarrollo cognitivo del ser humano, junto a un conocimiento de la historia de los conceptos matemáticos que se desea impartir, así como el respeto a las culturas y subculturas presentes en el aula y en el entorno del alumnado, son requisitos indispensables para que la tarea docente curse con éxito, en el sentido de acompañar al alumnado de Primaria en su tarea de descubrimiento y construcción de las Matemáticas que le ayudarán a convertirse en un ciudadano/a autosuficiente en el mundo tecnificado que le ha tocado vivir.

Tema 2. Didáctica de la Aritmética

- 1) Todas las matemáticas que se estudian desde preescolar hasta el bachillerato están cimentadas en los sistemas numéricos: naturales, enteros, racionales y reales.
- 2) En el primer ciclo el niño debe aprender que el número tiene dos significados, según el contexto: cardinal y ordinal y que sirve para contar y calcular.
- 3) En el primer ciclo, el niño/a desarrolla la capacidad correspondiente pero, cuando los números son grandes, se presenta el conflicto cognitivo.
- 4) Es el momento de la introducción de sistemas de numeración posicionales, prestando mucha atención al cero y su función en estos sistemas: la decena como grupo de 10 unidades en 1º y las centenas como grupos de 10 decenas y 100 unidades en 2º.
- 5) En el contexto cardinal el niño debe tener ocasiones para agrupar, comparar, aparear, clasificar; manipulando objetos, contando con los dedos, experiencias que le permitirán paulatinamente pasar a la simbolización, cada vez más esquemática.
- 6) Habrá que ayudar al alumno/a a escapar a la algoritmización de los programas de Primaria, pues el aprendizaje de un algoritmo incluso si se ha alcanzado con éxito, no implica necesariamente pensamiento numérico.
- 7) El pensamiento aditivo se caracteriza por la capacidad de trabajar con conceptos, estrategias y representaciones que involucren a la suma y la resta.



- 8) El pensamiento multiplicativo se caracteriza por la capacidad de trabajar con conceptos, estrategias y representaciones que involucren a la multiplicación y la división.
- 9) Es fundamental estar alerta para descubrir los saberes no formales previos al trabajo escolar, el currículo nulo, que siempre deberá suministrar las primeras experiencias desde donde arrancar la marcha hacia la progresión.
- 10) En segundo ciclo se puede trabajar con los números racionales. En su expresión fraccionaria.
- 11) Número racional y fracción no son conceptos equivalentes. El maestro/a de primaria deberá tener claras estas cuestiones antes de hacer la transposición didáctica, para evitar que se instalen en su alumnado errores de concepto y vicios de cálculo.
- 12) Dada la capacidad de intuir razones y proporciones en edades tempranas, habrá que aprovechar esas intuiciones para comenzar a formalizar proporciones, razones, equivalencias, porcentajes, escalas, la fracción como relación parte-parte y relación parte-todo.
- 13) Para introducir el sistema de numeración decimal, es imprescindible, didácticamente hablando, trabajar con sistemas de bases pequeñas o de bases insertas en la cotidianeidad, es el caso del sistema binario, el de base doce y el sexagesimal, presentes aún en la vida cotidiana.
- 14) Como en el caso anterior, en el tercer ciclo, para asignar una identidad a los racionales por discriminación, se pueden introducir algunos números irracionales π ó raíz cuadrada de 2.
- 15) Se atenderá con cuidado la tarea de "dar sentido" a los números positivos y negativos y sus operaciones.

Tema 3. Didáctica de la geometría plana y espacial

- 1) El modelo de los niveles de Van Hiele: Consta de tres componentes: los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y la comprensión intuitiva, el insight, la gestalt, que surge como un aspecto del proceso de descubrimiento.
- 2) Es responsabilidad de maestro o la maestra proporcionar al alumnado las suficientes y adecuadas situaciones didácticas en que se puedan desarrollar esas experiencias.



- 3) Niveles: Reconocimiento, análisis, relaciones, deducción y axiomatización.
- 4) Las fases: Los y las estudiantes se hallan en un determinado nivel de aprendizaje y procede comenzar la tarea de paso al nivel siguiente que, según el modelo Van Hiele, se produce en cinco fases: **Información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre, integración.**
- 5) Nos aseguraremos de que “llegada la edad” en el sentido de los seguidores de Piaget, la carencia no será debida a falta de experiencias suficientes.

Tema 4. Didáctica de la proporcionalidad y medida

- 1) Comenzar con cosas más cercanas al niño como el paso, el palmo, el brazo...
- 2) Ir de lo concreto a lo abstracto, de lo fácil a lo difícil.
- 3) Permitir al alumno que descubra y que aprenda de sus errores.
- 4) Fomentar las discusiones colectivas o en grupo, permitiendo el aprendizaje en diálogo y la confrontación de ideas.
- 5) Utilizar la vida como fuente de situaciones problemáticas.
- 6) Usar y fomentar el sentido común.
- 7) A seis años es difícil comprender un razonamiento comparativo, lo cual es absolutamente imprescindible para comprender el concepto de medida, aunque sean capaces de realizar mediciones según normas dadas de antemano. Sobre todo si no se han aprovechado las intuiciones tempranas sobre razones y proporciones..
- 8) Hacia los siete años (siempre como edad orientativa), puede hacer agrupaciones y reconocimiento de figuras, comprender el concepto de medida directa, ordenar un conjunto de elementos mentalmente y puede reconocer, en objetos de igual forma, cuál es mayor o menor.
- 9) Todo aquello que resulte abstracto e hipotético estará excluido de los procesos lógicos del niño, podrá calcular medidas indirectamente mediante cálculos a partir de fórmulas de un modo mecánico, pero no comprenderá por qué esas formulas dan el resultado correcto.
- 10) En esta etapa el desarrollo evolutivo del niño/a indica que ya puede haber adquirido el principio de conservación, en particular el de la longitud. El niño/a tiene adquirido



el principio de conservación si comprende que la cantidad de algo se mantiene aunque cambie la forma.

- 11) Es adecuado integrar diversas maneras de medir, aportadas por la diversidad cultural del aula.
- 12) Sólo cuando se trabaje con comodidad en el sistema de numeración decimal, se podrá esperar un avance en la medida con unidades del sistema métrico decimal.

Tema 5. Didáctica del tratamiento de la Información, azar y probabilidad

- 1) Existen pocos estudios que nos guíen en la empresa de decisión del momento en que podemos introducir los variados conceptos estadísticos.
- 2) Sabemos que el uso de la estadística por los gobernantes es muy antiguo.
- 3) Siguiendo la idea de que los conceptos difíciles de aprender, generalmente nacieron en etapas tardías de la historia, cabe intuir que podremos hacer estadística desde edades tempranas, acomodando los niveles de exigencia a esas edades.
- 4) Incluso adultos con formaciones académicas superiores, cometen los mismos errores de bulto que los estudiantes de cursos bajos.
- 5) El tratamiento de la estadística por **proyectos**, por un lado es propio de la estadística por otro permite **respetar los ritmos de aprendizaje y los niveles competenciales de partida** del alumnado. Existe disensión entre los distintos autores, respecto a la posibilidad de desarrollar los contenidos probabilísticos en primaria.
- 6) Sin embargo, las deficiencias que presenta la mayoría de la población adulta en materia de probabilidad inclinan a pensar más en falta de experiencias adecuadas para alcanzar mejores niveles de razonamiento probabilístico que en una vinculación de la edad a esos niveles, es decir, parece más adecuado el modelo Van Hiele, desarrollado en el tema de Didáctica de la Geometría que en el modelo de Piaget.
- 7) Los problemas de azar están presentes en todas las
- 8) Desde edades muy tempranas tienen una idea intuitiva del concepto de azar e incluso de una mayor o menor probabilidad de un suceso u otro, aunque no en términos de cálculo.



-
- 9) Si se permiten suficientes experiencias, muy pronto se puede manejar una estimación de la frecuencia relativa.
 - 10) En la adolescencia, estas estimaciones pueden llevarles a la elaboración de estrategias personales de éxito en función de las frecuencias relativas primero intuitidas, luego estimadas, más tarde conjeturadas y luego confirmadas mediante el cálculo.
 - 11) Existen errores conceptuales hasta edades muy avanzadas que confunden posibilidad con probabilidad.
 - 12) En situaciones didácticas favorables, con un buen facilitador/a y frente al reto asequible y bien preparado por el maestro o la maestra, las criaturas de 10 años pueden comparar probabilidades expresadas mediante cualquier tipo de fracciones.





GLOSARIO

ÁREA

- 1) Superficie comprendida dentro de un perímetro.
- 2) Unidad de superficie equivalente a 100 metros cuadrados.
- 3) Cada una de las especialidades que se estudian en un plan académico de estudios.
- 4) Conjunto de materias que están relacionadas entre sí.

ASIGNATURA

- 1) Cada una de las materias que se enseñan en cada curso en un centro docente.

BLOQUE

- 1) Cada una de las subdivisiones de las áreas que se estudian en cada ciclo educativo. Ej. Aritmética, Geometría, Medida y Proporcionalidad y Estadística y Probabilidad, pertenecientes al área de Matemáticas de 2º curso del Grado de maestro/a de Primaria y cuya didáctica constituye los temas centrales de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas de dicho curso.

CAPACIDADES

- 1) Propiedad de una cosa de contener otras dentro de ciertos límites. Capacidad de una vasija, de un local.
- 2) Aptitud, talento, cualidad que dispone a alguien para el buen ejercicio de algo.
- 3) Aptitud legal para ser sujeto de derechos y obligaciones.

CICLO

- 1) Cada uno de los tramos educativos en que se dividen las etapas educativas de un plan de estudios.

COMPETENCIAS

- 1) Pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado.



CONSTRUCTIVISMO

- 1) Constructivismo: El conocimiento no es recibido pasivamente sino construido activamente por el sujeto cognoscente.
- 2) La función de la cognición es adaptativa y sirve a la organización del mundo experiencial, no al descubrimiento de una realidad ontológica.
- 3) Aceptar sólo el primer principio es considerado como constructivismo trivial por los que aceptan ambos principios, porque este principio ha sido conocido desde Sócrates y, sin la ayuda del segundo, se mete de cabeza en todos los perennes problemas de la epistemología occidental.

CONTENIDOS

- 1) Cosa que se contiene dentro de otra.
- 2) Tabla de materias, a modo de índice.
- 3) Conocimientos que se pretende que sean aprendidos por los y las estudiantes.

CONTEXTO

- 1) Entorno lingüístico del cual depende el sentido y el valor de una palabra, frase o fragmento considerados.
- 2) Entorno físico o de situación, ya sea político, histórico, cultural o de cualquier otra índole, en el cual se considera un hecho.

CONTRATO DIDÁCTICO

El conjunto de las obligaciones recíprocas que cada "partenaire" de la situación didáctica impone o cree que él impone a los otros y aquellas que se le imponen o las que cree que se le imponen, a propósito del conocimiento en juego: es el concepto de contrato didáctico. Corresponde al resultado de una "negociación", a menudo implícita, de las diversas relaciones que se establecen entre el alumno, un cierto medio y un sistema educativo. Este contrato no es un verdadero contrato: No es ni explícito, ni consentido libremente ya que depende de un conocimiento necesariamente desconocido de los alumnos. Coloca al profesor y el alumno ante una autentica situación paradójica: si el maestro dice lo que quiere para que el alumno lo haga, no puede obtenerlo más que como ejecución de una orden y no por el ejercicio de sus conocimientos y de su juicio. Recíprocamente, si el alumno acepta que



el maestro le enseñe las soluciones y las respuestas, no las establece por él mismo y por lo tanto, no pone en juego los conocimientos matemáticos necesarios y no puede apropiárselos (“aprehenderlos”). El aprendizaje exige pues el rechazo del contrato para hacerse cargo del problema de modo autónomo (devolución). El aprendizaje va pues a basarse, no en el buen funcionamiento del contrato, sino sobre sus rupturas, de donde se deriva la importancia de estudiar con más detalle las condiciones efectivas de sus rupturas.

CURRÍCULO

- 1) Plan de estudios.
- 2) Conjunto de estudios y prácticas destinadas a que el alumno desarrolle plenamente sus posibilidades.
- 3) Curriculum vitae.

DIDÁCTICA

- 1) Arte, técnica o ciencia de enseñar.

ECLÉCTICA

- 1) Escuela filosófica que procura conciliar las doctrinas que parecen mejores o más verosímiles, aunque procedan de diversos sistemas.

ESTRATEGIAS

- 1) En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento.

ETAPA

- 1) Principales fases programadas en un plan educativo.

ETAPAS DE DESARROLLO

- 1) Principales fases en que se divide el proceso de aprendizaje de una persona.



ETNOMATEMÁTICAS

- 1) Neologismo referente a las matemáticas vistas como elemento cultural, propio y característico de cada grupo étnico.

EVALUACIÓN

- 1) Estimar los conocimientos, aptitudes y rendimiento de los alumnos.

HARDWARE

- 1) Conjunto de los componentes que integran la parte material de una computadora.

HEURÍSTICA

- 1) Técnica de la indagación y del descubrimiento.
- 2) En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.

INVESTIGACIÓN-ACCIÓN

- 1) Método de investigación que se lleva a cabo mediante la reflexión sobre las acciones llevadas a cabo en el proceso de enseñanza.

INVESTIGACIONES

- 1) que tiene por fin ampliar el conocimiento científico, sin perseguir, en principio, ninguna aplicación práctica.

MÉTODO

- 1) Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla.

METODOLOGÍA

- 1) Conjunto de métodos que se siguen en una investigación científica o en una exposición doctrinal.

MODO

- 1) Procedimiento o conjunto de procedimientos para realizar una acción.



NIVELES COGNITIVOS

- 1) Referente a los niveles de conocimiento.

OBJETIVOS

- 1) Capacidades que se pretende alcanzar como resultado del proceso de aprendizaje.
- 2) Que existe realmente, fuera del sujeto que lo conoce.

OBSOLETO

- 1) Anticuado, inadecuado a las circunstancias actuales.

PEDAGÓGICA

- 1) Se dice de lo expuesto con claridad que sirve para educar o enseñar.
- 2) Que se ocupa de la educación y la enseñanza.

PROBLEMA

- 1) Situación que presenta dificultades para responder a las cuestiones que plantea por lo que su respuesta es desconocida.

PROYECTO DE INNOVACIÓN

- 1) Proyecto que tiene por objetivo mudar o alterar algo, introduciendo novedades.

PROYECTO

- 1) Conjunto de escritos, cálculos y dibujos que se hacen para dar idea de cómo ha de ser y lo que ha de costar la realización de una obra material o intelectual.

RECURSO DIDÁCTICO

- 1) Medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende, es decir, el aprendizaje de una materia.

SEMIÓTICA

- 1) Ferdinand de Saussure la concibió como «la ciencia que estudia la vida de los signos en el seno de la vida social»



SISTEMAS DIDÁCTICOS

- 1) Chevallard y Johsua (1982) describen el SISTEMA DIDÁCTICO en sentido estricto, como formado esencialmente por tres subsistemas: PROFESOR, ALUMNO y SABER ENSEÑADO. Un aporte de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar es la inclusión, en el clásico triángulo didáctico "maestro, alumno, saber", de un cuarto elemento: el medio.

El medio (milieu) se define como el objeto de la interacción de los alumnos: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. En una acepción un poco más amplia, el medio al que el alumno se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la consigna que da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los alumnos y que mediante mecanismos diversos, transmite. Es decir, es el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Además está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc. Pero, entre los dos, debe considerarse una zona intermedia, la NOOSFERA, que, integrada al anterior, constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno. La noosfera es por tanto "la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza".

SITUACIÓN DIDÁCTICA

- 1) En la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau se dice que una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (que puede incluir instrumentos o materiales) y el profesor, con el fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.



SOFTWARE

- 1) Conjunto de programas, instrucciones y reglas informáticas para ejecutar ciertas tareas en una computadora.

TÉCNICAS

- 1) Conjunto de procedimientos y recursos de que se sirve una ciencia o un arte.

TECNICAS BÁSICAS DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

- 1) Conjunto de procedimientos y recursos de que se sirve la investigación pedagógica.

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Chevallard llama transposición didáctica al proceso que convierte el saber sabio, primero en saber que se quiere enseñar, y después, en saber enseñado.

Este proceso implica que el profesor recontextualice y repersonalice los conocimientos para presentarlos al alumno, de manera que los conceptos aparezcan como la respuesta más idónea a la situación concreta (contexto) presentada por el profesor. Para cerrar el proceso, la apropiación del concepto por parte del alumno requiere necesariamente que éste vuelva a redcontextualizar y redpersonalizar el saber, a efectos de identificarlo como un saber integrado en el corpus científico de la comunidad cultural a la cual pertenece.





LISTA DE ENLACES (LINKS)

ENLACE 1: Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de maestro en la Universitat Jaume I. Consultado a 20/11/2011.

<http://tdx.cat/bitstream/handle/10803/10368/alcalde.pdf?sequence=1>

ENLACE 2: Didáctica crítica de las Matemáticas. Consultado a 20/11/2011.

<https://sites.google.com/site/paraquelasmatematicas/>

ENLACE 3: Didáctica crítica de las Matemáticas. Consultado a 20/11/2011.

<https://sites.google.com/site/paraquelasmatematicas/>

ENLACE 4: El aprendizaje Basado en Proyectos en la Educación Matemática del siglo XXI. Cuaderno de Bitácora. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.slideshare.net/cmorsoc/el-aprendizaje-basado-en-proyectos-y-problemas-en-la-educacin-matemtica-del-siglo-xxi>

ENLACE 5: George Polya. Estrategias para la solución de problemas. Consultado a 20/11/2011.

http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

ENLACE 6: Problemas y experimentos recreativos. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.librosmaravillosos.com/problemasyexperimentos/index.html>

ENLACE 7: Principios y estándares para matemáticas escolares. NCTM. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php>



ENLACE 8: Una organización de los programas de investigación. Consultado a 20/11/2011.

http://funes.uniandes.edu.co/1151/1/85_Font2002Una_RevEMA.pdf

ENLACE 9: No todos somos constructivistas. Consultado a 20/11/2011.

http://www.robertexto.com/archivo14/no_constructivistas.htm

ENLACE 10: Catálogo de la colección "La matemática en sus personajes", de la editorial Nivola. Consultado a 20/11/2011.

http://www.nivola.com/listado_libros.php?idcol=2&nombre=La%20matem%E1tica%20en%20sus%20personajes

ENLACE 11: Fotografía y Matemáticas. Consultado a 20/11/2011.

http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/179

ENLACE 12: Los recursos didácticos. Consultado a 20/11/2011.

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/InfantilPrimaria/01/ejer-3-cap15.html>

ENLACE 13: Con la calculadora. Consultado a 20/11/2011.

<http://revistasuma.es/revistas/2-febrero-1989/con-la-calculadora.html>

ENLACE 14: Proyecto CIFRAS. Consultado a 20/11/2011.

<http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/index.html>

ENLACE 15: Recursos del colegio. Consultado a 20/11/2011.

<http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/colegio/colegio.html>

ENLACE 16: Geometría dinámica en Matemáticas. Consultado a 20/11/2011.

<http://jmora7.com/>

ENLACE 17: Matemáticas e Internet. Consultado a 20/11/2011.

http://books.google.es/books?id=an2MWA2EBHwC&printsec=frontcover&hl=es&source=gb_s_ViewAPI&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false



ENLACE 18: Didáctica para maestros. Consultado a 20/11/2011.

http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

ENLACE 19: Proyecto CIFRAS. Consultado a 20/11/2011.

<http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/index.html>

ENLACE 20: Página interactiva de Martínez Recio. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.uco.es/~ma1marea/alumnos/primaria/indice.html>

ENLACE 21: Matemáticas elementales en el ciberespacio.

<http://www.uco.es/~ma1marea/profesor/primaria/aritmeti/naturale/didactic/indice.htm>

ENLACE 22: Contar globos. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/5/ca5_00.html

ENLACE 23: Contar y sumar con regletas. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/2/ca2_05.html

ENLACE 24: Sumar con los dedos. Consultado el 20/11/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/2/ca2_02.html

ENLACE 25: Tabla de sumar. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/2/ca2_04.html

ENLACE 26: Multiplicar con bolas. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/2/ca2_01.html

ENLACE 27: Operaciones variadas. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/4/ca4_00.html

ENLACE 28 Introducción a las fracciones. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/b/2/cb2_06.html



ENLACE 29: Fracciones primaria. Consultado el 20/12/2011.

<http://palmera.pntic.mec.es/~jcuadr2/fraccion/index.html>

ENLACE 30: Números decimales. Consultado el 20/12/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/b/2/cb2_07.html

ENLACE 31: Decimales con la calculadora. Consultado el 20/12/2011.

<http://revistasuma.es/revistas/2-febrero-1989/con-la-calculadora.html>

ENLACE 32: El calendario, una construcción social de la medida del tiempo. Consultado el 20/12/2011.

<https://sites.google.com/site/calendarcom2/>

ENLACE 33: El Calendario del Tai. Consultado el 20/12/2011.

http://www.fisem.org/web/union/revistas/3/Union_003_004.pdf

ENLACE 34: Página interactiva de Martínez Recio. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.uco.es/~ma1marea/alumnos/primaria/indice.html>

ENLACE 35: Un paseo por el infinito. Consultado a 20/11/2011.

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13468:un-paseo-por-el-infinito&catid=59:exposicie&directory=67

ENLACE 36: Palillos. Consultado a 20/11/2011.

<http://revistasuma.es/IMG/pdf/2/051-054.pdf>

ENLACE 37: Animación para la orientación. Consultado a 20/11/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/4/ca4_03.html

ENLACE 38: Página interactiva de Martínez Recio. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.uco.es/~ma1marea/alumnos/primaria/indice.html>



ENLACE 39: Un mundo a tu medida. Consultado a 20/11/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/a/3/ca3_00.html

ENLACE 40: El peso y la masa. Consultado a 20/11/2011.

<http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/pesomasa/index.html>

ENLACE 41: El volumen y la capacidad. Consultado a 20/11/2011.

<http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/volumen/index.html>

ENLACE 42: Página interactiva de Martínez Recio. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.uco.es/~ma1marea/alumnos/primaria/indice.html>

ENLACE 43: Los errores en probabilidad.

<http://gaussianos.com/marilyn-vos-savant-la-mujer-que-provoco-el-error-de-erdos/#more-6480>

ENLACE 44: Laboratorio básico de azar y probabilidad. Consultado a 20/11/2011.

<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>

ENLACE 45: Laboratorio básico de azar y probabilidad. Consultado a 20/11/2011.

<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>

ENLACE 46: Registro de datos. Consultado a 20/11/2011.

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/b/5/cb5_00.html

ENLACE 47: El azar y su aprendizaje. Consultado a 20/11/2011.

<http://revistasuma.es/IMG/pdf/3/021-027.pdf>

ENLACE 48: Página interactiva de Martínez Recio. Consultado a 20/11/2011.

<http://www.uco.es/~ma1marea/alumnos/primaria/indice.html>



ENLACE 49: Problemáticas: Recurso TIC para resolver problemas de Matemáticas de Primaria.

http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/1388



BIBLIOGRAFÍA

- ABDOUNUR, J. (2009). *Razones, proporciones y pensamiento proporcional en la música pitagórica: un abordaje histórico-matemático*, 266, 61-86.
- ALCALDE, M., PÉREZ, I. y LORENZO, G. (2009) *Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en la formación de maestros*. Castellón. UJI
- ALCALDE, M., PÉREZ, I. y LORENZO, G. (2009) *Los números naturales en la formación de maestros*. Castellón. UJI
- ALCALDE, M., PÉREZ, I. y LORENZO, G. (2011) *La Geometría, la Estadística, el Azar y la Probabilidad en la formación de maestros*. Castellón. UJI
- ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. M^a. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid. Síntesis.
- ALSINA, C., PÉREZ, R. y RUIZ, C. (1989). *Simetría dinámica*. Madrid. Síntesis.
- AÑÓN, E., MARTÍN, O. y MORALES, L. (2011). *Matemáticas en Imágenes*. Madrid. ELO
- BALSEGA, S. (2010) *Una historia de la medida de la Tierra*. Madrid. Nivola.
- BOLT, B & HOBBS, D. (1991) *101 proyectos matemáticos*. Barcelona. Labor.
- BOLT, B. (1988). *¿Qué es la geometría?*. *Suma*, 29, 5-16.
- BORRÁS, E. (1996). *Algunos modelos de simulación aleatoria y su aplicación a la enseñanza del azar*. Barcelona. UPC
- BURGUÉS, C. (1998). *Aportación de la didáctica de las matemáticas a la formación profesional de los futuros maestros y maestras*. *Uno*, 17, 31-35.
- CALVO, C. & BARBA, D. (2010). *La división: mucho más que un algoritmo*. *Uno*, 54, 43-54.
- CANALS, M.A. (2009). *Documents de treball de Maria Antonia Canals*. València. FESPM
- CASTRO, E. & CASTRO, E. (2010). *El desarrollo del pensamiento multiplicativo*. *Uno*, 54, 31-40.
- CATELNUOVO, E. (1975). *Didáctica de la matemática moderna*. México. Trillas.
- CESSAROLI, A. (2007) *La sorpresa de los números*. Madrid. Maeva Ediciones.
- COCKCROFT, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.
- COMENIUS, J.A. (1998). *Didáctica Magna*. México. Porrúa.



- ENGEL, A. (1988) *Probabilidad y estadística*. Valencia. Mestral.
- FORRELLAD, E. (2009). *La clase dels esquelets. Un model de vida d'aula vinculat al desenvolupament de competències*. *Guix*, 359, 1-20.
- FREUDENTHAL, H. (1967). *Las Matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid. Biblioteca para el hombre actual.
- GIMÉNEZ, J. (2009). *Proporción, Belleza y educación matemática*. *Biblioteca ce uno*, 266, 7-24.
- GIMÉNEZ, J. (2010). *Potenciando competencia numérica y cálculo mental*. *Uno*, 54, 5-13
- GÓMEZ, A. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid. Síntesis.
- GUILLÉN, G. (1991). *Poliedros*. Madrid. Síntesis.
- HARGITTAI, I. y HARGITTAI, M. (1994). *Symetry. A unifying concept*. California. Shelter Publications.
- HERNAN, F. (1988). *Lo que he aprendido*. *Suma*, 1, 7-11.
- HERNAN, F. y CARRILLO, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas* Madrid: Síntesis.
- IFRAH, G. (1985). *Las cifras*. Madrid. Alianza Editorial.
- JIMÉNEZ, J. ET ALT. (2009). *La proporción, arte y matemáticas*. Barcelona. Graó
- LUELMO, M.J., NOMDEDEU, X., RODRÍGUEZ, C. & VELÁZQUEZ, F. (2001). *Ideas para la clase de Matemáticas*. Canarias. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno Canario.
- PÉREZ, R. (1994). *Geometría en todos los niveles y según el nivel*. Barcelona. Graó
- SEGARRA, LL. (1999). *Material per a l'aula. Primaria. Matemàtiques*. *Guix*, 256 i 257 21-27.

WEBGRAFÍA

- ALCALDE, M. (2010). *Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de maestro en la Universitat Jaume I*. Tesis doctoral, Universitat Jaume I. Recuperado el 1 de octubre de 2011, de <http://tdx.cat/bitstream/handle/10803/10368/alcalde.pdf?sequence=1>
- BORRÁS, E Y MORATA, M. (1989) *El azar y su aprendizaje*. Recuperado el 13 de noviembre de 2011 de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/3/021-027.pdf>
- CHAVARRÍA, J. Teoría de las situaciones didácticas. cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/10/15



EDUTECA (2003) *Principios para matemáticas escolares. Consejo Estadounidense de Profesores de Matemáticas (NCTM)*. Recuperado el 13 de noviembre de 2011 de <http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php>

FONT V. (2010). *Una Organización de los Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. REVISTAEMA, VOL. 7, Nº 2, 127-170. Recuperado el 11 de noviembre de 2011 de http://funes.uniandes.edu.co/1151/1/85_Font2002Una_RevEMA.pdf

GARCÍA, J. ProblemÁTICAS. Primaria. http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/1388

GAUSSIANOS (1999). *Marilyn vos savant, la mujer que provocó el error de Erdős*. Recuperado el 28 de diciembre de 2011 de <http://gaussianos.com/marilyn-vos-savant-la-mujer-que-provoco-el-error-de-erdos/#more-6480>

GODINO, J.D. (2004). *Didáctica de la Geometría para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de octubre de 2011, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

GODINO, J.D. (2004). *Didáctica de la Medida para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de octubre de 2011, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

GODINO, J.D. (2004). *Didáctica de la Proporcionalidad para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de octubre de 2011, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

GODINO, J.D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de octubre de 2011, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

GODINO, J.D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de octubre de 2011, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

GODINO, J.D. (2004). *Didáctica de los Sistemas Numéricos para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 10 de octubre de 2011, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf



I.E.S. ROSA CHACEL. Departamento de Matemáticas (2005). *George Polya. Estrategias de resolución de problemas*. Recuperado el 15 de noviembre de 2001 de

http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

JUAN, V.C.(1989). *Con la Calculadora*. Recuperado el 13 de noviembre de 2011 de

<http://revistasuma.es/IMG/pdf/2/042-043.pdf>

MARTÍNEZ, A. (1998). *No todos somos constructivistas*. Revista de Educación, núm. 315, pp. 179-198.

Recuperado el 5 de diciembre de 2011 de

http://www.robertexto.com/archivo14/no_constructivistas.htm

MORA, J.A. (2010), *Geometría dinámica en matemáticas*. Recuperado el 14 de diciembre de 2011 de

<http://jmora7.com/>

MORALES, C. (2011). El Aprendizaje basado en Proyectos y Problemas en la Educación Matemática del siglo XX. Recuperado el 20 de noviembre de 2011 de [http://www.slideshare.net/cmorsoc/el-](http://www.slideshare.net/cmorsoc/el-aprendizaje-basado-en-proyectos-y-problemas-en-la-educacin-matemtica-del-siglo-xxi)

[aprendizaje-basado-en-proyectos-y-problemas-en-la-educacin-matemtica-del-siglo-xxi](http://www.slideshare.net/cmorsoc/el-aprendizaje-basado-en-proyectos-y-problemas-en-la-educacin-matemtica-del-siglo-xxi)

MORENO, P., NOMDEDEU, X Y BORRÁS, E. (2000). *Fotografía y Matemáticas*. Recuperado el 10 de

diciembre de 2011 de http://recursostic.educacion.es/apls/informacion_didactica/179

NIVOLA. *Colección: la matemática en sus personajes*. Recuperado el 18 de diciembre de 2011 de

http://www.nivola.com/listado_libros.php?idcol=2&nombre=La%20matem%20tica%20en%20sus%20personajes

NOMDEDEU, X. (2011). Cuestiones críticas sobre la enseñanza de las matemáticas. Recuperado el 01 de

octubre de 2011 de <https://sites.google.com/site/paraquelasmatematicas/>

PERELMAN, J. I.(2008) *Problemas y experimentos recreativos*. Recuperado el 22 de diciembre de 2011.

<http://www.librosmaravillosos.com/problemasyexperimentos/index.html>

PROYECTO CIFRAS. *El pueblo. Recursos del colegio*. Recuperado el 13 de octubre de 2011 de

<http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/colegio/colegio.html>

PROYECTO CIFRAS. Actividades de Aritmética para Primaria. Recuperado el 14 de octubre de 2011, de

<http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/index.html>

THALES.CICA (1989). *Los recursos didácticos*. Recuperado el 13 de noviembre de 2011 de

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/InfantilPrimaria/01/ejer-3-cap15.html>



VELÁZQUEZ, F ET AL. (1998). *Matemáticas e internet*. Recuperado el 25 del 2011 de http://books.google.es/books?id=an2MWA2EBHwC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ViewAP&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Materiales VIU de Matemáticas del profesor D. Manuel López Pellicer.

Agradecimientos

Consultora

D^a Rosario Nomdedeu Morenc

Departamento de Diseño de Contenidos Multimedia

Coordinadora

D^a Mercedes Romero Rodrigo

Diseñadores

D^a Carmina Gabarda López

D. Jorge García Meneu

D^a Cristina Ruiz Jiménez

D^a Sara Segovia Martínez



Reservados todos los derechos VIU - 2011 ©.

www.viu.es